1. Se consideră funcția f:**R**→**R** definită prin $f(x)=(x^2-3x-3)e^x$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că tangenta la graficul funcției f, dusă în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$, unde $x_0=-2$, este paralelă cu axa Ox .

2. Se consideră funcția f:$[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$.

a) Să se verifice că $f(1)+f(e)=\dfrac{2e}{1+e}$.

b) Să se arate că $f\,'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{(x+\ln x)^2}$, oricare ar fi $x\in[1,+\infty)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției g:$[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $g(x)=\dfrac{f\,'(x)}{(f(x)+1)^2}$.

3. Se consideră funcția f :**R**→**R**, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Știind că g :**R*** →**R** este funcția definită prin $g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+g(x^2)+g(x^3)+...+g(x^{2008})+x^{2010}}{x^{2009}}$.

4. Se consideră funcția f:$(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x-x+1$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

c) Să se rezolve în $(0,+\infty)$ ecuația $f\left(x^{2008}\right)+f\left(\dfrac{1}{x^{2008}}\right)=0$.

5. Se consideră funcția f:$(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, pentru $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f\,'(x)}{x}$.

6. Fie funcția f:$(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in(1,\infty)$.

b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-1$.

c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

7. Se consideră funcţia f:**R**→**R**, $f(x) = x^{2008} + 2008^x$.

a) Să se determine $f'(x)$, $x\in$**R**.

b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe ***M***..

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$.

8. Se consideră funcţia f:**R**→**R**, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se determine ecuaţia asimptotei către -∞ la graficul funcţiei f.

b) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$, pentru orice $x\in$**R**.

c) Să se demonstreze că oricare ar fi x∈**R** avem $\dfrac{2}{3}\le f(x)+f(x^2)\le 4$.

9. Se consideră funcţia f:**R**→**R**, $f(x) = x^2 + e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0) = 1$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe ***M***..

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{e^x}$.

10. Se consideră funcţiile f, g:**R**→**R**, $f(x) = (x-1)e^x$ şi $g(x) = xe^x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = g(x)$ pentru orice $x\in$**R**.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei spre -∞ la graficul funcţiei g .

c) Dacă $I\subset$**R** este un interval, să se demonstreze că funcţia g este crescătoare pe I dacă şi numai dacă funcţia f este convexă pe I.

11. Se consideră funcţia f:**R**\{1}→**R** dată prin $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$.

a) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\neq 1$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

c) Să se demonstreze că pentru orice $a<1$ şi $b>1$ are loc inegalitatea $f(a)-f(b)\le -8$.

12. Se consideră funcţia f:[1,+∞)→**R** , $f(x) = x - 2\ln x$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[1,\infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este descrescătoare pe [1,2].

c) Folosind faptul că $1\le x\le x^2\le 2$, oricare ar fi $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2 - x\le 2\ln x$, pentru orice $x\in\left[1,\sqrt{2}\right]$.

13. Se consideră funcţia f:(0, +∞)→**R**, $f(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Să se arate că $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}, \forall x>0$.

b) Să se arate că $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

14. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x-2)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că funcţia f' este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

15. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, & x\ge0\\ e^x, & x<0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

16. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to$R, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\le1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=1$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

c) Să se determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(e^x\right)+f\left(e^{x^2}\right)+\ldots+f\left(e^{x^{2008}}\right)}{x^{2008}}$.

17. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax-6, & x<4\\ \sqrt{x}, & x\ge4\end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui a, astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=4$

b) Să se calculeze $f'(9)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(9,3)$.

18. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

c) Să se determine semnul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $g(x)=(x^2-1)\ln x$

19. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este convexă pe $(0,\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$.

20. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\le1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$.

a) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(f\left(x\right)-1\right)\cdot x\right)$

21. Se consideră funcția f: **R**→**R**, $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\,'(x)}{f\,''\left(x\right)}$.

c) Utilizând faptul că $e^x \geq x+1$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$ să se demonstreze inegalitatea $\dfrac{e^{n+1}-e}{e-1}\geq\dfrac{n\cdot\left(n+3\right)}{2}$ pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

22. Se consideră funcția f: **R** → **R**, $f(x) = e^x - ex - 1$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe **R**.

c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ şi dreapta de ecuație $x = 1$.

23. Se consideră funcția f:(0,+∞)→**R** ,$f(x) = x - \ln x$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se demonstreze că $\sqrt{x}\geq 1+\ln\sqrt{x}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

24. Se consideră funcția f :**R**\\{1}→**R**, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$.

c) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f.

25. a) Să se studieze continuitatea funcției f:**R**→**R**, $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$, în punctul $x_0 = 1$.

b) Să se calculeze derivata funcției f:**R**→**R.**, $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$.

c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=32$.

26. Se consideră funcția f:**R**→**R**, $f(x) = 2^x - x\ln 2$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

c) Să se determine punctele de extrem ale funcției f.

27. Se consideră funcția f :**R**\\{3}→**R**, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

a) Să se calculeze $f\,'(x)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{3\}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

28. Se consideră funcția f:$[1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{x-1}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[1,+\infty)$.
b) Să se studieze monotonia funcției f pe $[1,+\infty)$.
c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

29. Se consideră funcțiile f,h:$[0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ şi $h(x)=f^2(x)$.

a) Să se verifice că $h'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, oricare ar fi $x\geq 0$.
b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.
c) Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

30. Se consideră funcția f :$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.
b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției f.
c) Să se demonstreze că $f(x)+f(x^3)\geq -2$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

31. Se consideră funcția f :$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+2}, & x\geq 0\\ x+\dfrac{3}{2}, & x<0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0=0$.
b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.
c) Să se arate că $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2},2\right)$, oricare ar fi $x\in[0,\infty)$.

32. Se consideră funcțiile f, g :$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+4$ şi $g(x)=x^3-5x^2+8x-4$.
a) Să se calculeze $f'(x)-g'(x)$, $x\in$R.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

33. Se consideră funcția f:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+3x$.
a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.
b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

34. Se consideră funcția f:$(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{x^2}{2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
c) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției f.

35. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+\sqrt{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Să se arate că funcţia f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se determine coordonatele punctului, care aparţine graficului funcţiei f, în care tangenta la graphic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

36. Pentru orice $n\in\mathbf{N}$ se consideră funcţiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f_0(x)=\ln x$ şi $f_n(x)=f_{n-1}'(x)$.

a) Să se determine funcţia f_1.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei f_2.

c) Să se arate că $f_0(x)\le\frac{1}{f_1(x)}-1$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

37. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

38. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3}{x^2+1}, & x\le1\\ \frac{2x+a}{x^2+2}, & x>1\end{cases}$, unde $a\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine numărul real a astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=1$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcţiei f.

c) Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $x_0=2$ să fie egală cu 1.

39. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)$ şi $h(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$.

a) Să se demonstreze că $h(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $h'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-1}$, unde $x\in\mathbf{R}\setminus\{1,2\}$.

c) Să se demonstreze că $\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{h'(x)}{h(x)}+\frac{f'(x)}{f(x)}$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{1,\frac{3}{2},2\right\}$.

40. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+1}, & x\le0\\ -2x+1, & x>0\end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei f în punctul $x_0=0$.

b) Să se demonstreze că funcţia f este crescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$.

c) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

41. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=-\frac{x}{e^x}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\le 1$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

42. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x-3)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

43. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x)-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2007}\right)\le f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

44. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

45. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ avem $f(e^x+1)\ge 4$.

46. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se arate că $f(x)\ge -1$, pentru orice $x>0$.

47. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$ pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se demonstreze că $x+\frac{2}{\sqrt{x}}\ge 3$ pentru orice $x>0$.

48. Se consideră funcția f:**R**→**R**, $f\left(x\right)=3^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, unde $x\in$**R**.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe **R**

49. Se consideră funcția f:**R**→**R**, $f\left(x\right)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$.

a) Să se verifice că $f'\left(x\right)=\frac{-x^2+3x-2}{e^x}$, pentru orice $x\in$**R**.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre +∞ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f\left(x\right)\geq\frac{1}{e}$ pentru orice $x\leq 2$.

50. Se consideră funcția f :(0,+∞)→**R** , $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$

a) Să se verifice că $f'\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către +∞ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe (0,+∞).

51. Se consideră funcția f :(0,+∞)→**R,** $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=e$.

c) Să se arate că ln $\ln x\leq\frac{x}{e}$ pentru orice $x>0$.

52. Se consideră funcția f:(0,+∞)→**R**, $f(x)=x\ln x-x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\ln x$ pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe (0,+∞).

53. Se consideră funcția f: **R** →**R**, $f(x)=x^3-3x+1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\leq 3$, pentru orice $x\leq 2$.

54. Fie funcția f: **R** →**R**, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

a) Să se calculeze $f'(1)$.

b) Să se determine intervalele de concavitate şi de convexitate ale funcției f.

c) Să se arate că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq-\frac{1}{2}$.

55. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se arate că $2\sqrt{x}\ge 2+\ln x$, pentru orice $x>0$.

56. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-x-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in(0,\infty)$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

c) Să se arate că $f(x)\ge 0$, oricare ar fi $x>0$.

57. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcției f.

c) Să se demonstreze că $e^x\ge ex$ pentru orice $x>0$.

58. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x+1)e^x-1$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

c) Să se arate că $x\cdot f(x)\ge 0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

59. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x\cdot e^x$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=(x+1)\cdot e^x$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției f.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f.

60. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x>1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

61. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f(2007)>f(2008)$.

62. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către +°° la graficul funcției f.

c) Să se arate că $f\left(\sqrt[3]{2007}\right)<f\left(\sqrt[3]{2008}\right)$.

63. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$.

c) Să se demonstreze că $f(x)\geq e^2$, pentru orice $x>1$.

64. Se consideră funcția f: $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2-3\sqrt[3]{x}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Să se arate că $\dfrac{x+2}{3}\geq\sqrt[3]{x}$, pentru orice $x>0$.

65. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

a) Să se verifice dacă $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.