

Limite de funcții

Notății: $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, α - punct de acumulare a lui D ;

1. Definiții ale limitei

Definiția 1.1. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui α astfel încât $\forall x \in D \cap U, x \neq \alpha$, să rezulte $f(x) \in V$.

Definiția 1.2. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0}, x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, având $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ (criteriul cu șiruri);

Definiția 1.3. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in D \setminus \{\alpha\}$ și $|x - \alpha| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|f(x) - l| < \varepsilon$;

Definiția 1.4. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$, dacă $l_s = l_d = l$, unde $l_s = \lim_{x \rightarrow \alpha, x < \alpha} f(x)$ și $l_d = \lim_{x \rightarrow \alpha, x > \alpha} f(x)$.

2. Operații cu limite de funcții

$f: D \rightarrow \mathbf{R}, g: D \rightarrow \mathbf{R}, \alpha$ - punct de acumulare a lui D , $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l_2, l_1, l_2 \in \mathbf{R}$;

$$1. \lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \alpha} a f(x) = a \cdot l_1;$$

$$4. \text{daca } l_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

3. Limite tip

$$1. \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 \alpha^m + b_1 \alpha^{m-1} + \dots + b_m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}_+, n \in \mathbf{N}, n \geq 2; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty;$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \alpha} a^x = a^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}; \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ dac\u0103 } a > 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty, \quad \text{dacă } 0 < a < 1;$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \log_a x = \log_a \alpha, \alpha > 0 \text{ finita}, \alpha \in R_+^* \setminus \{1\}; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = +\infty \quad \text{dacă } a$$

$$> 1; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \quad \text{dacă } 0 < a < 1;$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha; \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha, \alpha \notin \frac{\pi}{2} + \pi Z,$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha, \alpha \notin \pi Z; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x = -\infty;$$

$$\lim_{x < \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim_{x > \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{x > 0} \operatorname{ctg} x = -\infty;$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \arcsin x = \arcsin \alpha, \alpha \in [-1, 1], \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \arccos x = \arccos \alpha, \alpha \in [-1, 1];$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \alpha, \alpha \in R, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \alpha, \alpha \in R; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0;$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \forall n \in Z, a > 1;$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0,$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \forall r \in R.$$

LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

1) FUNCȚIA PUTERE $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^n$, unde n număr natural nenul

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$$

Exemple:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^6 = -\infty$, pentru că $-5x^6 \rightarrow -5 \cdot (+\infty) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -10x^2 = -\infty$, pentru că $-10x^2 \rightarrow -10 \cdot (+\infty) = -\infty$

2) FUNCȚIA RADICAL (DE ORDIN 2) $f: [0, \infty) \rightarrow R$, $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Exemple:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+10} = +\infty$, pentru că $2x+10 \rightarrow 2 \cdot (+\infty) + 10 = +\infty + 10 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 20} = +\infty$, pentru că $x^2 - 20 \rightarrow (-\infty)^2 - 20 = +\infty - 20 = +\infty$

3) FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ $f : R \rightarrow R$, $f(x) = a^x$, unde $a =$ bază, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \text{ dacă } a > 1 \text{ (adică bază supraunitară)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \text{ dacă } a \in (0,1), \text{ (adică bază subunitară)}$$

Exemple:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$, pentru că $a = 3 > 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4,5^{-2x} = +\infty$, pentru că $a = 4,5 > 1$, iar $-2x \rightarrow -2 \cdot (-\infty) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{x+10} = +\infty$, pentru că $a = 8 > 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{x-7} = +\infty$, pentru că $a = 10 > 1$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,7^x = 0$, pentru că $a = 0,7 < 1$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = 0$, pentru că $a = \frac{1}{2} = 0,5 < 1$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-9} = 0$, pentru că $a = \frac{3}{4} = 0,75 < 1$, iar $2x-9 \rightarrow 2 \cdot (+\infty) - 9 = +\infty - 9 = +\infty$

4) FUNCȚIA LOGARITMICĂ $f : (0, +\infty) \rightarrow R$, $f(x) = \ln x$ (logaritmul natural, în baza $e=2,7\dots$, numărul lui Euler)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Exemple:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+10) = +\infty$, pentru că $2x+10 \rightarrow 2 \cdot (+\infty) + 10 = +\infty + 10 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(8x^5 - 10) = +\infty$, pentru că $8x^5 - 10 \rightarrow 8 \cdot (+\infty) - 10 = +\infty - 10 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+10) = +\infty$, pentru că $-2x+10 \rightarrow -2 \cdot (-\infty) + 10 = +\infty + 10 = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x^4 - 1) = +\infty$, pentru că $2x^4 - 1 \rightarrow 2 \cdot (-\infty)^4 - 1 = 2 \cdot (+\infty) - 1 = +\infty - 1 = +\infty$

Exerciții:

Să se calculeze următoarele limite (explicând rezultatul găsit):

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x+5}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,3^{2x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4,5^{3x-6}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{5x}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^{10}$ 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -30x^4$ 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2)$ 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-8)$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+10} + 2,8^{3x-9} + 0,8^{2x-7} + \ln(3x-10) + x^{100})$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{6x-99}$ 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^6-100}$ 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 0,5^x + \ln x + \sqrt{x})$

13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-5x}$ 14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^6$ 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3$ 16) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^4$

17) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,2^{-3x+10}$ 18) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,36^{8-x}$ 19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{-9x+7}$ 20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4+6}$

21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4-8x}$ 22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1,5^{-4x-7}$ 23) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2,8^{-x}$ 24) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3,8^{7-x}$

25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(8-2x)$ 26) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-10x+10)$ 27) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-7x^5+8)$

28) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-20x^{21}-300)$ 29) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-20x+3}$ 30) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3+10}$

31) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 \cdot \sqrt{-x}$ 32) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\ln(x+10)$ 33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \cdot \sqrt{x+10}$

34) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x$ 35) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^x$ 36) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{4} \cdot \ln(2x+7)$

37) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7}{8} \cdot \sqrt{x+9}$ 38) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3}^x$ 39) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2^x$ 40) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5)^{2x}$

LIMITELE FUNCȚIILOR POLINOMIALE ȘI A FUNCȚIILOR RAȚIONALE

1) LIMITE DE FUNCȚII POLINOMIALE

Exemple de funcții polinomiale:

$$f(x) = 2x+10, \text{ funcție polinomială de gradul I}$$

$$f(x) = x^2+5x-52, \text{ funcție polinomială de gradul II}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 7, \text{ funcție polinomială de gradul III}$$

Deci gradul unei funcții polinomiale este cea mai mare putere la care apare necunoscuta x

Fie $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ o funcție polinomială de gradul n , atunci limita sa când $x \rightarrow +\infty$ este: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_n \cdot (+\infty)$

Exemple:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^4 - 3x^2 + 6x - 9 = 2 \cdot (+\infty)^4 = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^5 + 6x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 8 = -3 \cdot (+\infty)^5 = -3 \cdot (+\infty) = -\infty$

2) LIMITE DE FUNCȚII RAȚIONALE

Exemple de funcții raționale: $f(x) = \frac{2x-6}{3x+5}$, $f(x) = \frac{x^2-8}{6-5x}$, $f(x) = \frac{x^3-8}{x+2}$

Fie $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ o funcție polinomială de gradul n și $g(x) = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \dots + b_0$ o funcție polinomială de gradul i , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_i}, & \text{dacă grad } f = \text{grad } g \\ 0, & \text{dacă grad } g > \text{grad } f \\ +\infty, & \text{dacă grad } f > \text{grad } g \text{ și numerele } a_n \text{ și } b_i \text{ au același semn} \\ -\infty, & \text{dacă grad } f > \text{grad } g \text{ și numerele } a_n \text{ și } b_i \text{ au semne diferite} \end{cases}$$

Exemple:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{3x-7} = \frac{2}{3}$, au gradele egale cu 1

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} = +\infty$, gradul de sus este mai mare, iar numerele 1 și 2 au același semn

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{-3x} = -\infty$, gradul de sus este mai mare, iar numerele 1 și -3 au semne diferite

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{3x^2+10} = 0$, gradul celui de jos este mai mare

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2-9x+9}{3x+40} = -\infty$, gradul celui de sus este mai mare, iar numerele -2 și 3 au semne diferite

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 6x}{2x^2 + 3} = \frac{5}{2}$, au gradele egale cu 2

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{x^2 - 8x - 7} = 0$, gradul celui de jos este mai mare

Exerciții pentru muncă independentă

Să se calculeze următoarele limite, explicând rezultatul găsit:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{3x - 5}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 6x^2 + 5x - 9)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 - 4)$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 7}{6x^2 + 7}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 7x - 8}{2x + 4}$

6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2}{-2x + 6}$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^3 - 6x^2 + 9)$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 6x - 71)$

9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 9)$

10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9x + 8}{3x^2 - 9x + 7}$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - 6x + 4}{4x + 8}$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x}{6x - 9}$

13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6}{x^3}$

14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 9}{6x + 10}$

15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 5x - 9}{-6x + 7}$

16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^4 + 8x - 100)$

17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 - 6x^2 + 6x + 8)$

18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-8x^2 + 5)$

19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 9}{x + 5}$

20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 7}{-2x + 9}$

21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 7}{-x^2 + 5x - 9}$

22) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 9x + 7}{5x + 6}$

23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 9x + 7}{-5x + 10}$

24) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x^2}{6x + 77}$

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 10}{6x - 8}$

26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^3 + 2x}{2x^2 - 5x + 7}$

27) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x - 9}{24x + 7}$

28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 9x - 55)$

29) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 9x^2 + 6x - 40)$

30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 - 9x^2 + 5x - 9)$

Nedeterminări : $\frac{\infty}{\infty}$

Să se calculeze limitele de funcții:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+8}{2x^2+5x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2}{x^2+4}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x^2+3x-5}{4x^2-1}$;
 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-x^2}{3x^3+x+2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-5x+11}{-3x^3+4x^2-\sqrt{6}}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+3}{\sqrt{2x^2-5}}$;
 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{|x-1|}$; 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{|x-1|}$; 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$;
 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}$; 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}$; 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$;
 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$; 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+5}}$;
 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^4+2x)}$; 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{2x}+1)}{\ln(e^x+1)}$; 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3-x^3}{2x^2+5x}$;

Să se determine parametrii reali a și b , astfel încât :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0 ;$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

Să se calculeze limitele de funcții :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4-2x^2}{3x^6+x^3+2x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x^2+3}$;
 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$;
 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-2x^2+2x-1}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3-8}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+x}{x^4-x}$;

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$;

13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1 - n(x - 1)}{(x - 1)^2}$; $n \in \mathbf{N}^*$; 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; $m, n \in \mathbf{N}^*$; $m \neq n$.

14) $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{12x^3 + 28x^2 + 3x - 18}{4x^3 + 20x^2 + 33x + 18}$; 15) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 + 6x + 8}$;

16) m și p fiind numere naturale, să se afle :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^p - a^p}.$$

Să se afle :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - 1)^3 a - (a - 1)^3 x}{(x - 1)^2 a - (a - 1)^2 x}.$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

Să se calculeze limitele de funcții :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{e^{5x} - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x-2} - 1}{x^3 - 1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{3}x} - 1}{x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - e^{4x}}{e^{5x} - e^{2x}}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27}{x - 3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\alpha x} - 1}{\beta x}$, ($\alpha > 0$);

9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2}$; 10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4^x - 64}{x - 3}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{4x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{6x}$.

Să se calculeze limitele de funcții :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{7x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 5x)}{\ln(1 + 2x)}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x - x^2)}{x}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + x^4 - x^2)}{1 - x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\ln(1 + 4x)}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 + 2x)}{2x}$;

7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 27 + \ln(x - 2)}{x - 3}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 3x)}{\ln(1 + \sin 5x)}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}{5x}$;

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin x)}{\sin 3x}.$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{7x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 9x} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 - x^2)}{3x^2} ; 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{5x^2} ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{x} ; 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x} ; 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} ;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(x-2)}{x^2 - 3x + 2} ; 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 3x)}{x^2} ; 10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x^2 + x - 2)}{\sin(x^2 + 3x + 2)} ;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{\arcsin(x^2 + x - 6)} ; 12) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\arcsin(x^2 - 5x + 4)}{x^2 - 16} ; 13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1}.$$

Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{tg} 10x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 5x} ; 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}, \beta \neq 0.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{\operatorname{tg}(3x-2)}{3x^2 + x - 2} ; 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arctg} 5x}.$$

Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} ; 2) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{\operatorname{tg}(4x^2-1)} ; 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{\operatorname{arctg}(x^2-9)}.$$

Nedeterminări : $\frac{0}{0}$

✚ Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} ; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} ; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{x-1} ;$$

$$\begin{aligned}
 &4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{4 + 3x} - 2}; \\
 &7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 8} - 2}{x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5} - 3}{x^2 + x - 2}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}; \\
 &10) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}; \\
 &13) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x}}{x}; \\
 &15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{2}}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x + 1} - 1}{\sqrt[3]{x + 1} - 1}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x + 5} - 3}{1 - \sqrt{5 - x}}; \\
 &17) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2}}{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{5x - 1}}; \quad 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} - 1}; \quad 19) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x - b} - \sqrt{a - b}}{x - a}.
 \end{aligned}$$

Nedeterminări : $\infty - \infty$

Să se calculeze limitele de funcții :

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 + x - 1}); \\
 &3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1 - x^3}); \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}); \\
 &5) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - 8x + 6} + x\sqrt{3}); \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{9x^2 + 5} + 3x); \\
 &7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + x}); \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{2x^2 + 3x - 2}); \\
 &9) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2\sqrt{x^2 + 1}); \quad 10) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 1}); \\
 &11) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - x + 1} + 2x); \quad 12) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 3}); \\
 &13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right); \quad 14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right); \quad 15) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin 2x} \right);
 \end{aligned}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right); \quad 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right); \quad 19) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right);$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x+1) - \ln x); \quad 21) \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+2) - \ln x];$$

Nedeterminări : 1^∞

Să se calculeze limitele de funcții :

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{x^2+1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} (13 - 4x)^{\frac{1}{x-3}}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{x^2}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 6} (7 - x)^{\frac{1}{x-6}}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{\sqrt{-x}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{2x}}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \right)^x \left(\frac{x+3}{x+5} \right)^x;$$

Aflați valorile parametrului a , pentru care : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + 3x - 2} \right)^x = e$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^{\sqrt{x^2+4}} \text{ este : a) } e^{-2}; \text{ b) } e; \text{ c) } 1; \text{ d) } e^2; \text{ e) } e^{-1}.$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{1+x^3} - \frac{1}{1+x} \right) \text{ este: a) } 0; \text{ b) } 1; \text{ c) } \sqrt{2}; \text{ d) } \sqrt{3}; \text{ e) } \infty.$$