Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADAT (30 pont)

5p **1.** Határozd meg az x valós számot, ha 5, $2x+3$, $2x+7$ számok egy számtani haladvány egymás után következő tagjai!

5p **2.** Igazold, hogy bármely m valós szám esetén az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(m-1)x-m$ függvény grafikus képe metszi az Ox tengelyt!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\sqrt{2-x}=2x-1$ egyenletet!

5p **4.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy kiválasztva egy számot az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazból, teljesítse az $5^{n-1}>(n+1)!$ összefüggést!

5p **5.** Határozd meg azon a és b valós számokat, amelyekre az xOy derékszögű koordináta-rendszerben az $x+(2a+1)y-4=0$ és $3x+by-8=0$ egyenesek metszéspontja $M(a,-2)$.

5p **6.** Igazold, hogy $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\operatorname{tg} x$, bármely $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ valós szám esetén!

II. FELADAT (30 pont)

1. Adott a $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & x & \frac{1}{x} \\ 1 & y & \frac{1}{y} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}$ determináns, ahol x és y zérótól különböző valós számok.

5p **a)** Igazold, hogy $D\left(2,\dfrac{1}{2}\right)=0$.

5p **b)** Igazold, hogy $D(x,y)=-\dfrac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$, bármely x és y zérótól különböző valós szám esetén!

5p **c)** Oldd meg a valós számok halmazán a $D(\log_2 x,\, 2)=0$ egyenletet!

2. Adottak az $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $2A(1)-A(-1)=A(3)$.

5p **b)** Határozd meg az a és b valós számokat, amelyekre $A(a)+bI_3=2\big(A(1)-I_3\big)\big(A(1)-I_3\big)$.

5p **c)** Igazold, hogy az $A(n)$ mátrix invertálható, bármely n természetes szám esetén!

III. FELADAT (30 pont)

1. Adott $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}$ függvény és az $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$ valós számsorozat.

5p **a)** Határozd meg f függvény vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ -ben!

5p **b)** Igazold, hogy az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő!

5p **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)(a_n-\ln n)$ határértéket!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+a+1, & x\le 1\\ x^2+a^2x, & x>1\end{cases}$ függvény, ahol a valós szám.

5p **a)** Határozd meg azon a valós számokat, amelyekre f folytonos az $x=1$ pontban!

5p **b)** Ha $a=2$ számítsd ki a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x)+x}\right)$ határértéket!

5p **c)** Ha $a=-1$ igazold, hogy az $f(x)+2^x=0$ egyenletnek van legalább egy megoldása a $[-1,0]$ intervallumban!