Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I.Thema (30 Punkte)

5p **1.** Es sei die komplexe Zahl $z = 4 - i$. Berechne $z \cdot \overline{z} - z - \overline{z}$, wo $\overline{z}$ die konjugierte Zahl von z ist.

5p **2.** Bestimme die reelle Zahl m, wenn bekannt ist, dass die Ox Achse tangent an das Schaubild der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 - m + 2$ ist.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $3\log_x 5 + \log_5(5x) = 5$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte dreistellige Zahl ein Vielfaches von 11 ist.

5p **5.** Es seien das Dreieck ABC, der Punkt M die Mitte der Seite BC und der Punkt N die Mitte der Seitenhalbierenden AM. Beweise, dass $\overrightarrow{BN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Zeige: wenn $(\sin x + 3\cos y)^2 + (\cos x - 3\sin y)^2 = 10$ und $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dann $x = y$.

II.Thema (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Determinante $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & 2 \\ x^2+x & y^2+y & 2 \end{vmatrix}$, wo x und y reelle Zahlen sind.

5p **a)** Zeige, dass $\Delta(0,2) = -2$.

5p **b)** Zeige, dass $\Delta(x,y) = (x-1)(y-1)(y-x)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **c)** Beweise, dass die Zahl $\Delta(m,n)$ teilbar durch 2 ist, für alle ganzen Zahlen m und n.

2. Gegeben ist die Matrix $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Berechne $A(0) + A(2)$.

5p **b)** Zeige, dass $A(a)A(b) = A(2ab - a - b + 1)$, für alle reellen Zahlen a und b.

5p **c)** Zeige, dass $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{2017}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.Thema (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}$.

5p **a)** Zeige, dass $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, für jedes $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote des Schaubildes der Funktion f gegen $+\infty$.

5p **c)** Berechne $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n)\right)^{2n^3}$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2-x+a, & x\le 0 \\ \dfrac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}, & x>0 \end{cases}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Berechne $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl a, für die die Funktion f in dem Punkt $x=0$ stetig ist.

5p **c)** Beweise: wenn $a\in(-6,-3)$, dann hat die Gleichung $f(x)=0$ wenigstens zwei, reelle, verschiedene Lösungen in dem Intervall $(-3,-1)$.