

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p** 1. Határozd meg a $z = i(1+i)^2$ komplex szám valós részét!
- 5p** 2. Határozd meg az m valós számokat tudva, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$ függvény képeinek halmaza a $[-1, +\infty)$ intervallum!
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $2^{2x} + 2^{x+1} = 4 - 2^x$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozd meg az $M = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ halmaz azon elemeinek számát, amelyek oszthatók 5-tel és nem oszthatók 10-zel!
- 5p** 5. Adott az ABC háromszög és az M pont úgy, hogy $\overline{CM} = 2\overline{BM}$. Igazold, hogy $\overline{AM} = 2\overline{AB} - \overline{AC}$.
- 5p** 6. Határozd meg az $x \in [0, \pi]$ valós számokat, amelyekre $\sin 2x = \sin x$.

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2015 & 2016 & x \\ 2015^2 & 2016^2 & x^2 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p** a) Számítsd ki $\det(A(2016))$.
- 5p** b) Igazold, hogy $\det(A(x)) = (2015 - x)(2016 - x)$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** c) Határozd meg az x valós számot, amelyre a $\det(A(x))$ értéke a lehető legkisebb!
2. Adottak az $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $X(a) = I_2 + aA$ mátrixok, ahol a valós szám.
- 5p** a) Számítsd ki $A \cdot A$.
- 5p** b) Igazold, hogy $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$, bármely a és b valós szám esetén!
- 5p** c) Határozd meg az $M = X(-3) \cdot X(-2) \cdot X(-1) \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot X(4)$ mátrix inverzét!

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{mx^2 + 4x - m}{x-1}$ függvény, ahol m valós szám.
- 5p** a) Igazold, hogy az $x=1$ egyenletű egyenes az f függvény grafikus képének függőleges aszimptotája bármely m valós szám esetén!
- 5p** b) Határozd meg az m valós számot, amelyre az $y=3$ egyenletű egyenes a $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ függvény grafikus képének vízszintes aszimptotája!
- 5p** c) Ha $m = -1$, számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2}$ határértéket!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2a, & x < 2 \\ ax + \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$ függvény, ahol a valós szám.
- 5p** a) Ha $a = 0$, számítsd ki $f(-1) \cdot f(4)$.
- 5p** b) Igazold, hogy az f függvény folytonos \mathbb{R} -en, bármely a valós szám esetén!
- 5p** c) Ha $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ igazold, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek van legalább egy gyöke a $(-1, 4)$ intervallumban!