Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass die Zahl $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5\frac{7}{25}$ natürlich ist.

5p **2.** Für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, berechne $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\ldots+(f\circ f)(10)$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_2\left(x^2+1\right)+3=\log_2\left(7x^2+9\right)$.

5p **4.** Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte Zahl aus der Menge $A=\left\{i,i^2,i^3,i^4\right\}$ eine reelle Zahl ist, wobei $i^2=-1$.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $M(1,n)$, $N(n,3)$ und $P(2n,5)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy, wo n eine natürliche Zahl ist. Wenn bekannt ist, dass die Vektoren $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{MP}$ kollinear sind, bestimme die natürliche Zahl n.

5p **6.** Zeige, dass $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, für jede reelle Zahl x.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(X(-1)\right)=12$.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen a so, dass $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.

5p **c)** Gegeben sind in dem kartesischen Koordinatensystem xOy die Punkte $A(2,4)$, $B(3,9)$ und $C\left(a,a^2\right)$, wo a eine natürliche Zahl ist. Bestimme die natürlichen Zahlen a so, dass ABC ein Dreieck ist und sein Flächeninhalt kleiner als 3 ist.

2. Gegeben ist die Matrix $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Beweise, dass $M(x)M(y)=M(x+y)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **b)** Bestimme die Umkehrmatrix der Matrix $M(x)$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **c)** Bestimme die reelle positive Zahl x so, dass $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$.

5p **a)** Berechne $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass es eine einzige natürliche von Null verschiedene Zahl m gibt so, dass $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2) \\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, für jede reelle Zahl a.

5p **b)** Beweise, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$ ist, für jede reelle Zahl a.

5p **c)** Beweise, dass für jede reelle Zahl a, $a<3$, die Gleichung $f(x)=0$ wenigstens eine Lösung in dem Intervall $(1,3)$ hat.