Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Igazold, hogy az $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5\frac{7}{25}$ természetes szám!

5p **2.** Ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, számítsd ki az $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\ldots+(f\circ f)(10)$ értéket!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_2\left(x^2+1\right)+3=\log_2\left(7x^2+9\right)$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg annak a valószínűségét, hogy az $A=\left\{i, i^2, i^3, i^4\right\}$, ahol $i^2=-1$, halmaz egy véletlenszerűen kiválasztott eleme valós legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $M(1,n)$, $N(n,3)$ és $P(2n,5)$ pontok, ahol n természetes szám. Ha az $\overrightarrow{MN}$ és $\overrightarrow{MP}$ vektorok kollineárisak, határozd meg az n természetes számot!

5p **6.** Igazold, hogy $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adottak az $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ és $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\det\left(X(-1)\right)=12$.

5p **b)** Határozd meg az a valós szám azon értékeit, amelyekre $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.

5p **c)** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2,4)$, $B(3,9)$ és $C\left(a,a^2\right)$ pontok, ahol a természetes szám. Határozd meg az a természetes szám azon értékeit, amelyekre az ABC egy háromszög és területe kisebb, mint 3.

2. Adott az $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $M(x)M(y)=M(x+y)$, bármely x és y valós szám esetén!

5p **b)** Határozd meg az $M(x)$ mátrix inverzét, ahol x valós szám!

5p **c)** Határozd meg azt az x pozitív valós számot, amelyre igaz az $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$ egyenlőség!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$ értéket!

5p **b)** Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $+\infty$ felé húzott ferde aszimptota egyenletét!

5p **c)** Igazold, hogy egyetlen m nullától különböző természetes szám létezik, amelyre $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2) \\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$ függvény, ahol a valós szám.

5p **a)** Igazold, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, bármely a valós szám esetén!

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, bármely a valós szám esetén!

5p **c)** Igazold, hogy bármely a, $a<3$ valós szám esetén az $f(x)=0$ egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1,3)$ intervallumban!