Sisteme liniare

Notații:

a_{ij} – coeficienți, x_i – necunoscute, b_i – termeni liberi, $i\in\{1,2,\ldots,n\}, j\in\{1,2,\ldots,m\}$;

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$, m – ecuații, n – necunoscute;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

r – rangul matricii A = rangul sistemului

Sisteme de trei ecuații cu trei necunoscute

Def. Un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute are forma $(S):\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$, unde a_i , b_i , c_i se numesc **coeficienții necunoscutelor** , iar d_i **termenii liberi** ai sistemului.

Def. Se numeste soluție a sistemului orice triplet (s_1, s_2, s_3) care este soluție pentru fiecare ecuație a sistemului.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$ **– matricea sistemului**

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right)$$ **- matricea extinsă a sistemului**

Regula lui Cramer

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix};\quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ - determinantul matricei sistemului

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (se obține din A înlocuind coeficienții lui x , prin coloana termenilor liberi)

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (se obține din A înlocuind coeficienții lui y , prin coloana termenilor liberi)

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ (se obține din A înlocuind coeficienții lui z , prin coloana termenilor liberi)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Sisteme liniare omogene

Sistemul $(S): \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ se numeşte **sistem liniar omogen**

Întotdeauna acest sistem este **compatibil** avand cel puțin soluția banală (cu toate componentele egale cu zero) $x = y = z = 0$.
Daca $\Delta = \det(A) \neq 0$ atunci (formulele lui Cramer) sistemul are numai soluția banală. În acest caz sistemul este **compatibil determinat.**
Daca $\Delta = \det(A) = 0$ atunci sistemul are şi alte soluții diferite de cea banală. Sistemul este **compatibil nedeterminat**.

Sisteme de m ecuații cu n necunoscute

Au forma : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ **(1)**

Dacă un sistem are soluții , atunci îl numim **compatibil** (**determinat** dacă are exact o soluție şi **nedeterminat** dacă sistemul are mai mult de o soluție)
Sistemul (1) se numeşte **omogen** daca are toți termenii liberi egali cu zero. Sistemul astfel obținut

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ se numeşte **sistemul omogen asociat** sistemului (1).

Coeficienţii necunoscutelor formeaza o matrice de tip *m* x *n*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$ numită **matricea sistemului** (1)

Dacă $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ sunt coloana necunoscutelor şi respectiv coloana termenilor liberi , atunci sistemul (1) se poate scrie sub **forma matriciala** $AX = C$.

Două sisteme **sunt echivalente** dacă sunt amandouă incompatibile sau sunt amandouă compatibile şi au aceleaşi soluţii.

Discutia unui sistem

Teorema Kronecker – Capelli . Sistemul liniar (1) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricii sistemului coincide cu rangul matricii extinse.

Comform teoremei avem nevoie de calculul rangului matricii *A*. Daca rang(*A*) = *r*, atunci există cel puţin un minor nenul de ordin *r*. Pe acesta îl numim **determinant principal** şi-l notam Δ_p .Ca să avem egalitatea rang(*A*) = rang($\overline{A}$) trebuie probat ca orice minor al matricii $\overline{A}$ care-l contine pe cel principal şi care nu este minor al lui *A* este nul. Orice astfel de minor de ordin $r + 1$, obţinut prin bordarea determinantului principal cu elemente corespunzatoare ale coloanei termenilor liberi , precum şi cu cele ale uneia din liniile rămase , se numeşte **minor caracteristic**. Vom nota un astfel de minor prin $\Delta_{car,k}$, unde *k* indica linia utilizată pentru bordare.

Teorema Rouche . Sistemul liniar (1) este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sunt nuli.

Deci dacă cel puţin un minor caracteristic este nenul sistemul este incompatibil.

Determinarea solutiilor

Presupunem ca rang(*A*) = *r* şi că am ales ca determinant principal al sistemului compatibil

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1r} \\ ... & ... & ... \\ a_{r1} & ... & a_{rr} \end{vmatrix}$$. De precizat că odată ales determinantul principal cu el se merge până la determinarea soluţiilor. Necunoscutele ale caror coeficienţi sunt în determinantul principal se

numesc **necunoscute principale**. Deci în cazul nostru acestea sunt x_1, x_2, ..., x_r.Celelalte necunoscute (dacă există), adica x_{r+1}, ... , x_n , se numesc **necunoscute secundare**. Ecuațiile ale căror coeficienți se află în determinantul principal se numesc **ecuații principale**. În cazul de față primele r ecuații sunt principale. Celelalte ecuații (dacă există) se numesc **ecuații secundare**.

Se rezolva sistemul format din ecuațiile principale : $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$ (*)

Soluțiile acestui sistem sunt soluții şi pentru (1), (din rang(A) = rang($\overline{A}$) , rezultă că celelalte linii sunt combinații liniare ale ecuațiilor principale, ceea ce arată că o soluție a sistemului de mai sus este soluție şi pentru (1)).

Analizam cazurile :

- dacă $r = n$, atunci sistemul (*) are atâtea ecuații câte necunoscute. Pentru rezolvare se pot aplica formulele lui Cramer : $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_p}; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta_p};......; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta_p}$, unde Δ_{x_n} se obține din Δ_p înlocuind coloana coeficienților lui x_n cu termenii liberi.
- daca $r < n$, atunci în ecuațiile principale se înlocuiesc necunoscutele secundare variabil $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, ..., x_n = \lambda_n; \lambda_k \in \mathbf{R}$ şi se rezolva sistemul format din ecuațiile principale (în care necunoscutele secundare trec în membrul drept). Pentru rezolvare se aplică regula lui Cramer.

Probleme rezolvate

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx + y + z = m^2 - 3 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ (m+1)x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$, unde m este un parametru real.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, știind că $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$.

b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $(1,2,-3)$.

c) Pentru $m = -1$ să se rezolve sistemul de ecuații.

R. a) $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ m+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6m + 10 + m + 1 \cancel{+2m} + 2 \cancel{-2m} - 15 = -5m - 2 \Rightarrow$

$-5m - 2 = -12 \Rightarrow -5m = -10 \Rightarrow m = 2.$

b) Înlocuim $x = 1$, $y = 2$ și $z = -3$ și obținem:

$\begin{cases} m + 2 - 3 = m^2 - 3 \\ m + 1 + 4 - 9 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m = 2, \text{ care verifică și prima ecuație} \end{cases}, \Rightarrow m = 2.$

c) Pentru $m = -1$ sistemul va fi $\begin{cases} -x + y + z = -2 \\ 5x - 2y + z = -2 \\ 2y + 3z = -2 \end{cases}$, matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

și $d = \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 10 + 2 - 15 = 3 \neq 0$, este sistem Cramer. Calculăm determinanții corespunzători necunoscutelor:

$d_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cancel{-2-4} \cancel{-4} \cancel{+6} \cancel{+4} = 12$, $d_y = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 - 2 + 30 = 24$,

$d_z = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 20 - 4 + 10 = -18$ și obținem soluțiile

$x = \frac{d_x}{d} = \frac{12}{3} = 4,\quad y = \frac{d_y}{d} = \frac{24}{3} = 8,\quad z = \frac{d_z}{d} = \frac{-18}{3} = -3$.

2. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$, unde $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $(2,1,-1)$ să fie o soluție sistemului.

b) Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = m^2 - 3m$, unde $m \in \mathbf{R}$.

c) Pentru $m = -5$ să se rezolve sistemul de ecuații.

R. a) Înlocuim în ultima ecuație a sistemului: $m \cdot 2 - 1 + 4\cdot(-1) = 1 \Rightarrow 2m = 6 \Rightarrow m = 3$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ m & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2m - 6 - 3m + 16 + 1 = -5m + 15 \Rightarrow -5m + 15 = m^2 - 3m \Rightarrow$

$m^2 + 2m - 15 = 0$ cu soluțiile $m_1 = 3$ şi $m_2 = -5$.

c) Pentru $m = -5$ matricea sistemului este: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ şi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{din \\ b)}}{=} (-5)^2 - 3\cdot(-5) = 25 + 15 = 40 \neq 0,$$ sistem Cramer.

$$d_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 12 - 3 - 3 + 32 = 0,$$

$$d_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 15 + 6 + 60 - 1 + 24 = 120,$$

$$d_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 40 + 6 - 15 + 4 + 4 = 40.$$

Soluția: $x = \dfrac{d_x}{\det(A)} = \dfrac{0}{40} = 0,\ y = \dfrac{d_y}{\det(A)} = \dfrac{120}{40} = 3,\ z = \dfrac{d_z}{\det(A)} = \dfrac{40}{40} = 1.$

3. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ şi matricea

$$A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

a) Să se calculeze $\det(A(4))$.
b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
c) Pentru $a\in\mathbf{R}-\{1,2\}$ să se rezolve sistemul.

R. a) $\det(A(4))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=\cancel{32}+4+4-2\cancel{-16}\cancel{-16}=6.$

b) Matricea $A(a)$ este inversabilă dacă determinantul matricei este nenul, ($\det(A(a))\neq0$).

$$\det(A(a))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1^2 & 2^2 & a^2 \end{vmatrix}=(a-1)(a-2)(2-1)=(a-2)(a-1).$$

$\det(A(a))\neq0\Rightarrow(a-2)(a-1)\neq0\Rightarrow a\neq2$ şi $a\neq1\Rightarrow a\in\mathbf{R}-\{2;2\}$.

c) Pentru $a\in\mathbf{R}-\{1,2\}\Rightarrow \det(A(a))=(a-2)(a-1)\neq0$.

$$d_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix}=(a-2)(a-1),\ d_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}=0,\ d_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Soluția: $x=\dfrac{d_x}{\det(A(a))}=\dfrac{(a-2)(a-1)}{(a-2)(a-1)}=1,\ y=\dfrac{d_y}{\det(A(a))}=\dfrac{0}{(a-2)(a-1)}=0,$

$$z=\frac{d_z}{\det(A(a))}=\frac{0}{(a-2)(a-1)}=0$$

4. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a,b,c\in\mathbf{R}$, sunt distincte două câte două.

a) Să se rezolve sistemul pentru $a=0$, $b=1$ şi $c=2$.
b) Să se verifice că $\det(A)=(a-b)(b-c)(c-a)$, unde A este matricea asociată sistemului.
c) Să se demonstreze că soluția sistemului nu depinde de numerele reale a, b şi c.

R. a) Pentru $a = 0$, $b = 1$ şi $c = 2$, sistemul va fi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \,\big|\, \cdot (-1) \\ 2y + 4z = 2 \,\big|\, : (2) \end{cases}$$. Din ultimele două ecuații

$$\begin{cases} -y - z = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 0, y = 1 \text{ şi } S = \{(0,\ 1,\ 0)\}.$$

b) $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \underset{L_1*(-1)+L_3}{\overset{L_1*(-1)+L_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c \cancel{+a} - b \cancel{-a}) = (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

(determinant Vandermonde).

c) Rezolvăm sistemul prin regula lui Cramer:

$$d_x = \begin{vmatrix} a & a & a^2 \\ b & b & b^2 \\ c & c & c^2 \end{vmatrix} = 0,\ d_y = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = d = \det(A), d_z = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix} = 0 \text{ şi}$$

$$x = \frac{d_x}{\det(A)} = 0,\ y = \frac{d_y}{\det(A)} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1,\ z = \frac{d_z}{\det(A)} = 0$$, soluții care nu depind de a, b, c.

5) Se consideră sistemul: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ x + y + az + t = -1 \\ x - y + z - t = b \end{cases}$, a şi b parametri reali.

a) Să se determine a şi b astfel încât matricea sistemului să fie de *rang* 2, iar sistemul să fie compatibil.

b) Pentru $a = -1$ şi $b = 1$ să se rezolve sistemul.

R. a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & b \end{pmatrix}$

$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ determinantul principal. Luăm determinantul de ordinul 3:

$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a + 1$ care trebuie să fie nul $\Rightarrow a = -1$.

Determinantul caracteristic trebuie să fie nul şi obținem:

$$d_c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & b \end{vmatrix} = 3b - 5 \Rightarrow 3b - 5 = 0 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$

b) Necunoscutele principale sunt x şi y, iar $z=\alpha\in\mathbf{R}$ şi $t=\beta\in\mathbf{R}$.

Sistemul principal: $\begin{cases} 2x-y=1-\alpha+\beta \\ x+y=-1+\alpha-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1+\alpha-\beta \end{cases}$.

6. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 10 & 8 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine rangul matricei A.

b) Să se studieze compatibilitatea sistemului $(S)\begin{cases} x+5y+4z=1 \\ 2x+10y+8z=3 \\ 3x+15y+12z=5 \end{cases}$.

R. a) Matricea A are liniile proporționale $\Rightarrow$ *rangA*=1.

b) $d_{c_1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$ sistemul este incompatibil.

7. Se consideră sistemul (S) $\begin{cases} 2x-y+5z+7t=0 \\ 4x-2y+7z+5t=0 \\ 2x-y+z-5t=0 \end{cases}$.

a) Sistemul admite soluțiile $x=-8$, $y=8$, $z=-3$, $t=1$, respectiv $x=4$, $y=8$, $z=0$, $t=0$? Justificați răspunsul.

b) Să se rezolve sistemul.

R. Sistemul e omogen, deci are ca soluție soluția banală $x=y=z=t=0$

a) Se verifică că $x=-8$, $y=8$, $z=-3$, $t=1$ nu e soluție a sistemului:

$2\cdot(-8)-8+5\cdot(-3)+7\cdot 1=-16-8-15+7=-32\neq 0$,

iar $x=4$, $y=8$, $z=0$, $t=0$ e soluție a sistemului: $2\cdot 4-8+5\cdot 0+7\cdot 0=8-8=0$.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=-6\neq 0 \Rightarrow rang\, A\geq 2$, unde A este matricea sistemului.

Cum $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ şi $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow rang\, A=2$.

Fie $y=\alpha\in\mathbf{R}$ şi $t=\beta\in\mathbf{R}$ se obține sistemul echivalent $\begin{cases} 2x+5z=\alpha-7\beta \\ 4x+7y=2\alpha-5\beta \end{cases}$ cu soluțiile

$x=\dfrac{\alpha}{2}-11\beta$, $y=\alpha$, $z=3\beta$ şi $t=\beta$ unde $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

8. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 5 & 6\\ 8 & 12 & 7 & m\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 4 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$, m parametru real.

a) Să se calculeze determinantul matricei A.

b) Pentru m=8 să se rezolve ecuația matriceală $A\cdot X=\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$.

R. a) $A=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}3 & 3 & 5 & 6\\ 4 & 4 & 7 & m\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow A$ nu este inversabilă pentru $\forall m\in\mathbf{R}$.

b) Pentru m=8 ecuația maticeală se transformă în:

$$\begin{pmatrix}6 & 9 & 5 & 6\\ 8 & 12 & 7 & 8\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 4 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 3\\ 5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}6x+9y+5x+6t=7\\ 8x+12y+7z+8t=9\\ 2x+3y+z+2t=3\\ 4x+6y+3z+4t=5\end{cases}.$$

Deoarece $\begin{vmatrix}6 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow rang\,A\geq 2$ şi cum toți minorii de ordin 3 sunt nuli$\Rightarrow$*rang A*=2.

Calculând minorii caracteristici $d_{c_1}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 7\\ 8 & 7 & 9\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$, $d_{c_2}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 7\\ 8 & 7 & 9\\ 4 & 3 & 5\end{vmatrix}$ se obține că sunt nuli, deci sistemul e compatibil nedeterminat.

Alegând $y=\alpha$ şi $t=\beta$, cu $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ se obține sistemul echivalent:

$\begin{cases}6x+5z=7-9\alpha-6\beta\\ 8x+7z=9-12\alpha-8\beta\end{cases}$ cu soluțiile $x=2-\frac{3}{2}\alpha; y=\alpha, z=-1, t=\beta$, deci ecuația matriceală are o infinitate de soluții, matrici coloană de forma $X=\begin{pmatrix}2-\frac{3}{2}\alpha-\beta\\ \alpha\\ -1\\ \beta\end{pmatrix}$, cu $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

9. Să se rezolve sistemul (S) $\begin{cases} x+2y+z+t=0 \\ 2x+y+z+2t=0 \\ x+2y+2z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$.

R. Sistem omogen, deci admite soluția banală $x=y=z=t=0$.

det A=0; $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ minor principal $\Rightarrow$*rang* A=3

Cu $t=\lambda\in\mathbf{R}\Rightarrow\begin{cases} x+2y+z=-\lambda \\ 2x+y+z=-2\lambda \\ x+2y+2y=-\lambda \end{cases}$. Sistem Cramer cu soluțiile $x=-\lambda$, $y=0$, $z=0$, $t=\lambda$.

10. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+3y+2z=9 \\ x+2y-3z=14 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$.

R. $\Delta_s=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-32 \Rightarrow$ Sistemul este de tip Cramer și are soluțiile:

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta_s}=1,\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_s}=2,\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta_s}=3$.

11. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 4x-3y+2z+4=0 \\ 6x-2y+3z+1=0 \\ 5x-3y+2z+3=0 \end{cases}$.

R. $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat (Cramer)

$\Delta_x=\begin{vmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-5\Rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=1$, Δ_y=-10 $\Rightarrow$ y=2, Δ_z=5, $\Rightarrow z$=-1. S={(1,2,-1)}.