

## LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

### 1) FUNCȚIA PUTERE $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = x^n$ , unde $n$ număr natural nenul

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$$

Exemple:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty$       c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^3 = -\infty$       d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^6 = -\infty$ , pentru că  $-5x^6 \rightarrow -5 \cdot (+\infty) = -\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -10x^2 = -\infty$ , pentru că  $-10x^2 \rightarrow -10 \cdot (+\infty) = -\infty$

### 2) FUNCȚIA RADICAL ( DE ORDIN 2) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Exemple:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+10} = +\infty$ , pentru că  $2x+10 \rightarrow 2 \cdot (+\infty) + 10 = +\infty + 10 = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 20} = +\infty$ , pentru că  $x^2 - 20 \rightarrow (-\infty)^2 - 20 = +\infty - 20 = +\infty$

### 3) FUNCȚIA EXPONENȚIALĂ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = a^x$ , unde $a = \text{bază}$ , $a > 0$ , $a \neq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \text{ dacă } a > 1 \text{ (adică bază supraunitară)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \text{ dacă } a \in (0, 1), \text{ (adică bază subunitară)}$$

Exemple:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$ , pentru că  $a = 3 > 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4,5^{-2x} = +\infty$ , pentru că  $a = 4,5 > 1$ , iar  $-2x \rightarrow -2 \cdot (-\infty) = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{x+10} = +\infty$ , pentru că  $a = 8 > 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^{x-7} = +\infty$ , pentru că  $a = 10 > 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,7^x = 0$ , pentru că  $a = 0,7 < 1$       f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5} = 0$ , pentru că  $a = \frac{1}{2} = 0,5 < 1$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-9} = 0$ , pentru că  $a = \frac{3}{4} = 0,75 < 1$ , iar  $2x-9 \rightarrow 2 \cdot (+\infty) - 9 = +\infty - 9 = +\infty$

### 4) FUNCȚIA LOGARITMICĂ $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , $f(x) = \ln x$ (logaritmul natural, în baza $e=2,7\dots$ , numărul lui Euler)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Exemple:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+10) = +\infty$ , pentru că  $2x+10 \rightarrow 2 \cdot (+\infty) + 10 = +\infty + 10 = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(8x^5 - 10) = +\infty$ , pentru că  $8x^5 - 10 \rightarrow 8 \cdot (+\infty) - 10 = +\infty - 10 = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-2x+10) = +\infty$ , pentru că  $-2x+10 \rightarrow -2 \cdot (-\infty) + 10 = +\infty + 10 = +\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x^4 - 1) = +\infty$ , pentru că  $2x^4 - 1 \rightarrow 2 \cdot (-\infty)^4 - 1 = 2 \cdot (+\infty) - 1 = +\infty - 1 = +\infty$



**Exerciții:**

Să se calculeze următoarele limite (explicând rezultatul găsit):

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x+5}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,3^{2x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4,5^{3x-6}$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{5x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^{10}$

6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -30x^4$

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2)$

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x-8)$

9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+10} + 2,8^{3x-9} + 0,8^{2x-7} + \ln(3x-10) + x^{100})$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{6x-99}$

11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^6-100}$

12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 0,5^x + \ln x + \sqrt{x})$

13)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{-5x}$

14)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^6$

15)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3$

16)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^4$

17)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,2^{-3x+10}$

18)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,36^{8-x}$

19)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{-9x+7}$

20)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4+6}$

21)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{4-8x}$

22)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1,5^{-4x-7}$

23)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2,8^{-x}$

24)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3,8^{7-x}$

25)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(8-2x)$

26)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-10x+10)$

27)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-7x^5+8)$

28)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-20x^{21}-300)$

29)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-20x+3}$

30)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3+10}$

31)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 \cdot \sqrt{-x}$

32)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3\ln(x+10)$

33)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \cdot \sqrt{x+10}$

34)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x$

35)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^x$

36)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{4} \cdot \ln(2x+7)$

37)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7}{8} \cdot \sqrt{x+9}$

38)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3}^x$

39)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2^x$

40)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5)^{2x}$



## LIMITELE FUNCȚIILOR POLINOMIALE ȘI A FUNCȚIILOR RAȚIONALE

### 1) LIMITE DE FUNCȚII POLINOMIALE

Exemple de funcții polinomiale:

$$f(x) = 2x+10, \text{ funcție polinomială de gradul I}$$

$$f(x) = x^2+5x-52, \text{ funcție polinomială de gradul II}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 7, \text{ funcție polinomială de gradul III}$$

Deci gradul unei funcții polinomiale este cea mai mare putere la care apare necunoscuta  $x$

Fie  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  o funcție polinomială de gradul  $n$ , atunci

$$\text{limita sa când } x \rightarrow +\infty \text{ este: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_n \cdot (+\infty)$$

Exemple:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 - 3x^2 + 6x - 9) = 2 \cdot (+\infty)^4 = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 6x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 8) = -3 \cdot (+\infty)^5 = -3 \cdot (+\infty) = -\infty$$

### 2) LIMITE DE FUNCȚII RAȚIONALE

Exemple de funcții raționale:  $f(x) = \frac{2x-6}{3x+5}$ ,  $f(x) = \frac{x^2-8}{6-5x}$ ,  $f(x) = \frac{x^3-8}{x+2}$

Fie  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  o funcție polinomială de gradul  $n$  și

$g(x) = b_i x^i + b_{i-1} x^{i-1} + \dots + b_0$  o funcție polinomială de gradul  $i$ , atunci:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_i}, & \text{dacă grad } f = \text{grad } g \\ 0, & \text{dacă grad } g > \text{grad } f \\ +\infty, & \text{dacă grad } f > \text{grad } g \text{ și numerele } a_n \text{ și } b_i \text{ au același semn} \\ -\infty, & \text{dacă grad } f > \text{grad } g \text{ și numerele } a_n \text{ și } b_i \text{ au semne diferite} \end{cases}$$

Exemple:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{3x-7} = \frac{2}{3}, \text{ au gradele egale cu } 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x+4} = +\infty, \text{ gradul de sus este mai mare, iar numerele } 1 \text{ și } 2 \text{ au același semn}$$

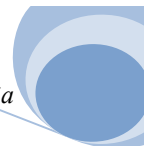
$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{-3x} = -\infty, \text{ gradul de sus este mai mare, iar numerele } 1 \text{ și } -3 \text{ au semne diferite}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{3x^2+10} = 0, \text{ gradul celui de jos este mai mare}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2-9x+9}{3x+40} = -\infty, \text{ gradul celui de sus este mai mare, iar numerele } -2 \text{ și } 3 \text{ au semne diferite}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-6x}{2x^2+3} = \frac{5}{2}, \text{ au gradele egale cu } 2$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{x^2-8x-7} = 0, \text{ gradul celui de jos este mai mare}$$



**Exerciții pentru muncă independentă**

Să se calculeze următoarele limite, explicând rezultatul găsit:

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+4}{3x-5}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3+6x^2+5x-9)$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^5-4$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{6x^2+7}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-7x-8}{2x+4}$

6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2}{-2x+6}$

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^3-6x^2+9$

8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2+6x-71$

9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x+9$

10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-9x+8}{3x^2-9x+7}$

11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2-6x+4}{4x+8}$

12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-5x}{6x-9}$

13)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6}{x^3}$

14)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-9}{6x+10}$

15)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2-5x-9}{-6x+7}$

16)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^4+8x-100$

17)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3-6x^2+6x+8$

18)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -8x^2+5$

19)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+9}{x+5}$

20)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-7}{-2x+9}$

21)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+7}{-x^2+5x-9}$

22)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-9x+7}{5x+6}$

23)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-9x+7}{-5x+10}$

24)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x^2}{6x+77}$

25)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+10}{6x-8}$

26)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^3+2x}{2x^2-5x+7}$

27)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x-9}{24x+7}$

28)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2+9x-55)$

29)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3-9x^2+6x-40)$

30)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4-9x^2+5x-9)$