Admitere arhitectură şi sistematizare iulie 1986

1. Să se afle soluțiile reale ale sistemului: $\begin{cases} x^{\sqrt{x}} = y^x \\ y^{\sqrt{x}} = x^y \end{cases}$. (1.1)

Soluție: Expresiile din sistem au sens dacă şi numai dacă $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. (1.2)

În aceste condiții sistemul este echivalent cu $\begin{cases} \ln x^{\sqrt{y}} = \ln y^x \\ \ln y^{\sqrt{x}} = \ln x^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}\ln x = x\ln y \\ \sqrt{x}\ln y = y\ln x \end{cases}$ (1.3)

Se observă că x=1 şi y=1 este soluție a sistemului.
Căutăm să vedem dacă găsim şi alte soluții:
Presupunem $x, y \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ (1.4)
şi sistemul (1.3) este echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{x}{\sqrt{y}} \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \sqrt{xy} \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy}\left(\sqrt{xy} - 1\right) = 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \end{cases} \quad (1.5)$$

În condițiile (1.4) $xy \neq 0$, din (1.5), în condițiile (1.2) rezultă:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ \dfrac{\ln x}{\ln y} = \dfrac{\sqrt{x}}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\ln x}{-\ln x} = x\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x\sqrt{x} = -1 \end{cases} \quad (1.6)$$

În condițiile (1.4) relația $x\sqrt{x} = -1$ este imposibilă. Deci singura soluție a sistemului (1.1) este $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

2. Să se determine polinoamele de gradul al doilea cu coeficienți reali care verifică egalitatea

$$P\left(X^3\right) = \left[P(X)\right]^3 \quad (2.1)$$

Soluție: Fie

$$P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0,\ a_3 \in \mathbf{R}^*,\ a_1, a_0 \in \mathbf{R} \quad (2.2)$$

Avem:

$$P\left(X^3\right) = a_2X^6 + a_1X^3 + a_0 \quad (2.3)$$

şi

$$\begin{aligned}\left[P(X)\right]^3 &= a_2^3X^6 + 3a_1a_2^2X^5 + 3\left(a_1^2a_3 + a_0a_2^2\right)X^4 + \left(a_1^3 + 6a_0a_1a_2\right)X^3 + \\ &+\left(3a_2a_0^2 + 3a_0a_1^2\right)X^2 + 3a_1a_0^2X + a_0^3\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pentru a avea loc (2.1) din (2.3) şi (2.4) rezultă prin egalarea coeficienților termenilor de grad 4 şi 5:

$$\begin{cases} 3a_1a_2^2 = 0 \\ a_1^2a_2 + 3a_0a_2^2 = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Cum $a_2 \neq 0$ fiind coeficientul dominant al polinomului P , din (2.5) rezultă

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Polinoamele $P(X^3)$ şi $[P(X)]^3$ se scriu acum:

$$\begin{aligned} P\left(X^3\right) &= a_2X^6 \\ \left[P(X)\right]^3 &= a_2^3X^6 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Egalitatea (2.1) este echivalentă cu

$$a_2^3 = a_2 \Rightarrow a_2 \in \{1, -1\}.$$

Polinoamele cerute sunt:

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X^2 \\ P_2(X) &= -X^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Să se calculeze, pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}}. \tag{3.1}$$

Soluție: Se observă că este nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Transformăm expresia: pentru $x \neq 0$ avem:

$$\begin{aligned}\frac{x^n - (\sin x)^n}{x^{n+2}} &= \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n}{x^2} = \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2}\left[1 + \frac{\sin x}{x} + \ldots + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right] = \\ &= \frac{x - \sin x}{x^3}\left[1 + \frac{\sin x}{x} + \ldots + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right]\end{aligned} \tag{3.2}$$

unde $1 + \frac{\sin x}{x} + \ldots + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1} = 1$ dacă n=1.

Considerăm funcțiile $g:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ şi $h:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ date de $g(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ şi

$h(x)=1+\dfrac{\sin x}{x}+...+\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{n-1}$.

Studiem existența limitei funcțiilor g şi h în $x = 0$.

Pentru funcția g în cazul nedeterminării $\dfrac{0}{0}$ suntem în condițiile de aplicabilitate ale teoremei lui L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{6\cdot\frac{x^2}{2}}=$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6} \quad (3.3)$$

Ținând cont că există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ şi de continuitatea funcției putere, deducem

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\sin x}{x}+...+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+...+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{n-1}=n \quad (3.4)$$

Din (3.2), (3.3) şi (3.4) deducem că există

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^n-(\sin x)^n}{x^{n+2}}=\lim_{x\to 0}\big(g(x)\cdot h(x)\big)=\lim_{x\to 0} g(x)\cdot\lim_{x\to 0} h(x)=\frac{1}{6}\cdot n=\frac{n}{6} \quad (3.5)$$

4. Se consideră mulțimile

$$K=\left\{A=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a\end{pmatrix}\middle| A\in M_2(\mathbf{Q})\right\} \text{ şi } L=\left\{c+d\sqrt{5}\,\middle|\, c,d\in\mathbf{Q}\right\}.$$

1) Să se arate că L este parte stabilă a lui **R** în raport cu operațiile de adunare şi înmulțire şi K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulțirea.
2) Să se arate că mulțimile L şi K formează corpuri în raport cu operațiile induse.
3) Să se stabilească un izomorfism de corpuri de la K la L.

Soluție: 1) Fie $x_1, x_2\in L$ de forma

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1+d_1\sqrt{5},\ c_1,d_2\in\mathbf{Q} \\ x_2 &= c_2+d_2\sqrt{5},\ c_2,d_2\in\mathbf{Q}\end{aligned} \quad (4.1)$$

Avem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= c_1 + c_2 + (d_1 + d_2)\sqrt{5} \\ x_1 \cdot x_2 &= \left(c_1 + d_1\sqrt{5}\right)\left(c_2 + d_2\sqrt{5}\right) = (c_1c_2 + 5d_1d_2) + (c_1d_2 + c_2d_1)\sqrt{5} \end{aligned} \tag{4.2}$$

($\mathbf{Q}$,+,·) fiind corp este parte stabilă în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi din (4.1) rezultă

$$\begin{aligned} &c_1c_2 + 5d_1d_2 \in \mathbf{Q},\ c_1d_2 + c_2d_1 \in \mathbf{Q}, \\ &c_1 + c_2 \in \mathbf{Q},\ d_1 + d_2 \in \mathbf{Q} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Din (4.2) şi (4.3) rezultă că $x_1+x_2\in L$ şi $x_1\cdot x_2\in L$, aşadar L este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire.

Fie $A_1, A_2\in K$ de forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 5b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix},\ a_1, b_1 \in \mathbf{Q},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 5b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}, a_2, b_2 \in \mathbf{Q} \tag{4.4}$$

Atunci

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 5(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \\ A_1 \cdot A_2 &= \begin{pmatrix} a_1a_2 + 5b_1b_2 & 5(a_1b_2 + a_2b_1) \\ a_1b_2 + a_2b & a_1a_2 + 5b_1b_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Din faptul că $\mathbf{Q}$ este parte stabilă în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi relaţiile (4.4) şi (4.5) rezultă că $A_1+A_2\in K$ şi $A_1\cdot A_2\in K$ şi deci K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea.

2) Deoarece L este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu adunarea şi înmulţirea, iar $\mathbf{R}$ este corp, pentru ca L să fie corp este suficient să demonstrăm:

i) $0 \in L$

ii) $x\in L \Rightarrow -x\in L$

iii) $1\in L$

iv) $x\in L\Rightarrow x^{-1}\in L,\ \forall x\in L-\{0\}$.

Într-adevăr:

i) $0 = 0 + 0\sqrt{5} \in L$

ii) fie $x\in L$ deci există $c,d\in\mathbf{Q}$ astfel ca $x = c + d\sqrt{5}$, atunci
$-x = (-c) + (-d)\sqrt{5} \in L$

iii) $1 = 1 + 0\sqrt{5} \in L$

iv) Fie $x = c + d\sqrt{5}$, atunci

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{^{c-d\sqrt{5})}1}{c + d\sqrt{5}} = \frac{c - d\sqrt{5}}{c^2 - 5d^2} \tag{4.6}$$

Demonstrăm că $c^2 - 5d^2 \neq 0$ pentru $c,d\in\mathbf{Q}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Presupunem contrariul: există $c,d\in\mathbf{Q}$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ astfel încât $c^2 - 5d^2 = 0$. Înmulţim relaţia $c^2 - 5d^2 = 0$ cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor lui c şi $d\in\mathbf{Q}-\{0\}$ rezultă că există $p,q\in\mathbf{Z}$ astfel ca $p^2 - 5q^2 = 0$. Putem presupune că p şi q sunt relativ prime, altfel împărțim cu cel mai mare divizor comun al lor. Se obține $p^2 = 5q^2 \Rightarrow 5 / p^2$ deoarece $(p,q)=1$.

Cum 5 este număr prim rezultă $5/p$, deci există $r\in\mathbf{Z}-\{0\}$ a.i. $p=5r$. Înlocuim se obține $25r^2 - 5p^2 = 0$, de unde $5r^2 - p^2 = 0$ deci $q^2 = 5r^2 \Rightarrow 5/q^2$ deci $5/q$. Dar $5/p$ deci $(p,q)=5$, absurd deoarece am luat $(p,q)=1$. Aşadar pentru orice $c,d\in\mathbf{Q}$, $c \neq 0$, $d \neq 0 \Rightarrow c^2 - 5d^2 \neq 0$.
Din (4.6) şi demonstrația precedentă obținem $x^{-1}\in L$. Deci L este subcorp al lui **R.**
Deoarece $x_1\cdot x_2 = x_2\cdot x_1$, $\forall x_1, x_2\in L$ se obține L este corp comutativ.

Întrucât K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu operațiile de adunare şi înmulțire a matricelor, iar $(M_2(\mathbf{Q}), +,\cdot)$ este inel, pentru ca K să fie corp cu operațiile induse este suficient să demonstrăm:

v) $O_2\in K$
vi) Dacă $A\in K$ atunci $-A\in K$, $\forall\, A\in K$
vii) $I_2 \in K$
viii) Pentru orice $A\in K-\{O_2\}$ există $A^{-1}\in K$.

Demonstrație:

v) $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5\cdot 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K$

vi) Pentru $A\in K$, $A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}$ avem $-A = \begin{pmatrix} -a & -5b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in K, \forall A \in K$.

vii) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5\cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$

viii) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \in K, \det(A) = a^2 - 5b^2 \neq 0$ conform demonstrației precedente, matricea A este nesingulară şi atunci este inversabilă, $A^{-1}\in M_2(\mathbf{Q})$.

Dar $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2 - 5b^2}\begin{pmatrix} a & -5b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2-5b^2} & 5\cdot\dfrac{-b}{a^2-5b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2-5b^2} & \dfrac{a}{a^2-5b^2} \end{pmatrix} \in K$, deoarece

$\dfrac{a}{a^2 - 5b^2}, \dfrac{b}{a^2 - 5b^2} \in \mathbf{Q}$.

Deci K este corp.

3) Definim funcția $f:K\to L$ prin $f(A) = a + b\sqrt{5}, \forall A \in K, A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbf{Q}$. Funcția f este bine definită deoarece reprezentarea lui A este unică.

Demonstrăm că f este morfism de corpuri.

$$f(A_1 + A_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{5} = (a_1 + b_1\sqrt{5}) + (a_2 + b_2\sqrt{5}) = f(A_1) + f(A_2)$$

$$f(A_1 \cdot A_2) = (a_1a_2 + 5b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5} = (a_1 + b_1\sqrt{5})(a_2 + b_2\sqrt{5}) = f(A_1)\cdot f(A_2)$$

Observăm că $f\left(I_2\right)=f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=1+0\sqrt{5}=1\neq 0$. Aşadar *f* duce elementul neutru din *K* în elementul neutru la înmulţirea din *L*. În particular *f* este diferit de morfismul nul.

Cum *f* este morfism de corpuri şi este nenul rezultă că *f* este morfism injectiv.

Morfismul *f* este şi surjectiv deoarece pentru orice $y\in L$ există *a* şi $b\in\mathbf{Q}$ şi $y=a+b\sqrt{5}$ deci $y=f\left(\begin{pmatrix}a & 5b\\ b & a\end{pmatrix}\right)$ adică $y\in \operatorname{Im} f$.

Aşadar *f* este izomorfism de corpuri.

5. Se consideră funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$. Să se calculeze integrala şi să se arate că funcţia *f* este bijectivă.

Soluţie: Fie funcţia

$$g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R},\ g(t)=\frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t} \tag{5.1}$$

Funcţia *g* este continuă pe $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ fiind obţinută prin operaţii cu funcţii elementare. Deci este integrabilă pe orice interval de forma (0, *x*) cu $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Deci funcţia $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\int_0^x \frac{(\sin t+\cos t)\sin t}{\cos^2 t}dt$ este bine definită. Avem

$$\begin{cases}\sin t>0\\ \cos t>0\end{cases},\ \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.2}$$

de unde rezultă

$$g(t)>0,\ \forall t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.3}$$

Deoarece $g(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+\frac{\sin t}{\cos t}=\operatorname{tg}^2 t+\operatorname{tg} t,\ t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că

$$f(x)=\int_0^x g(t)dt=\int_0^x \operatorname{tg} t\,dt+\int_0^x \operatorname{tg}^2 t\,dt \tag{5.4}$$

Calculăm fiecare integrală separat:

$$\int_0^x tgtdt=-\ln(\cos t)\Big|_0^x=-\left(\ln(\cos x)-\ln(\cos 0)\right)=-\ln\cos x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \tag{5.5}$$

Calculăm primitiva:

$$\int \text{tg}^2 dt = \int \frac{y^2}{1+y^2}dy = \int\left(1-\frac{1}{1+y^2}\right)dy = y - \text{arctg}\, y + C = \text{tg}\, t - t + C$$

Notăm $\text{tg}\, t = y \Rightarrow t = \text{arctg}\, y \Rightarrow dt = \dfrac{dy}{1+y^2}$ (5.6)

Şi atunci:

$$\int_0^x \text{tg}^2 t dt = \left(\text{tg}\, t - t\right)\Big|_0^x = tgx - x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.7}$$

Din (5.5) şi (5.7) obţinem:

$$f(x) = \text{tg}\, x - x - \ln(\cos x) \tag{5.8}$$

Funcţia *f* este derivabilă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ deoarece *g* este continuă pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Din (5.4) rezultă

$$f'(x) = \text{tg}\, x + \text{tg}^2 x,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{5.9}$$

şi se obţine $f'(x)>0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Conform consecinţei teoremei lui Lagrange funcţia *f* este strict crescătoare, deci injectivă.

Deoarece există $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\text{tg}\, x = 0$, iar funcţia ln este continuă, rezultă că există şi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\text{tg}\, x - \lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x) = 0$.

Analog, din existenţa limitelor: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\text{tg}\, x = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 0$ şi din continuitatea funcţiei ln deducem că există şi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$. Cum *f* este strict crescătoare şi continuă, avem $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, +\infty)$, deci *f* este surjectivă.

Fiind injectivă şi surjectivă funcţia *f* este bijectivă.