ANALIZA MATEMATICA

D_1: Fie I un interval şi $f,F:I\to\mathbf{R}$. Funcţia F se numeşte primitivă a lui f dacă:

1) F este derivabilă;
2) $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$

- Fie I un interval şi funcţia $f:I\to\mathbf{R}$ care admite primitive. Dacă F_1, $F_2:I\to\mathbf{R}$ sunt primitive ale funcţiei f, atunci $F_1(x)=F_2(x)+c$, $\forall x\in I$, $c\in\mathbf{R}$
- $\int f(x)dx=\{F:I\to\mathbf{R}\,|\,F \text{ primitiva a funcţiei } f\}$ - integrala nedefinită a funcţiei f
- O funcţie continuă pe un interval admite primitive pe acel interval
- Derivata oricărei funcţii derivabile pe un interval I are proprietatea lui Darboux pe I
- Daca $f:I\to\mathbf{R}$ admite primitive pe intervalul I, atunci f are proprietatea lui Darboux pe I
- Fie $f:I\to\mathbf{R}$. Dacă imaginea funcţiei pe un subinterval $J\subset I$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I
- O funcţie cu puncte de discontinuitate de speţa I nu admite primitive deoarece nu are proprietatea lui Darboux

Formula de integrare prin părţi.

Fie $f,g:I\to$R funcţii derivabile cu derivatele continue. Aunci funcţiile $f'\cdot g$ si $f\cdot g'$ admit primitive şi
$\int f(x)g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)g(x)dx.$

Teorema de schimbare de variabilă:

Fie $I,J\subset\mathbf{R}$ intervale, $\varphi:I\to J$ si $f:J\to R$ funcţii cu proprietăţile:

- φ este derivabilă pe I
- f admite primitiva F pe J

Atunci functia $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitiva $Fo\varphi$ pe I.

Daca φ este o functie derivabila pe un interval, atunci:

1) $\int \varphi^a(x)\cdot\varphi'(x)dx=\dfrac{\varphi^{a+1}}{a+1}+C$

2) $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\ln|\varphi(x)|+C,\quad \varphi\neq 0$

3) $\int a^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)dx=\dfrac{a^{\varphi(x)}}{\ln a}+C,\quad a>0,\ a\neq 1$

4) $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)-a^2}dx=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right|+C,\quad \varphi\neq\pm a, a\neq 0$

5) $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+a^2}dx=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{\varphi(x)}{a}+C,\ a\neq 0$

6) $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}}dx=\ln\left(\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}\right)+C,\ a\neq 0$

7) $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}}dx=\ln\left|\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}\right|+C,\quad \varphi^2>a^2$

8) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2-\varphi^2(x)}}dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + C,\ a>0, -a<\varphi<a$

9) $\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx = -\cos\varphi(x) + C$

10) $\int \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx = \sin\varphi(x) + C$

11) $\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}dx = tg\varphi(x) + C,\quad \varphi(x)\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k\in Z, \forall x\in I$

12) $\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}dx = -ctg\varphi(x) + C,\quad \varphi(x)\neq k\pi, \forall k\in Z, \forall x\in I$

13) $\int tg\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx = -\ln|\cos\varphi(x)| + C,\quad \varphi(x)\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, \forall k\in Z, \forall x\in I$

14) $\int ctg\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx = \ln|\sin\varphi(x)| + C,\quad \varphi(x)\neq k\pi, \forall k\in Z, \forall x\in I$

D_2: O funcție rațională *f*, definita pe un interval *I*, este de forma $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},\ \forall x\in I,\ Q(x)\neq 0,$ unde $P,Q\in R[X]$.

D_3: O funcție rațională se numeşte funcție rațională simplă dacă are una din formele:

1) $f(x)=P(x),\quad P\in\mathbf{R}[X]$

2) $f(x)=\frac{A}{(x-a)^n},\quad A,a\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}^*$

3) $f(x)=\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n},\quad A,B,a,b\in\mathbf{R}, a^2-4b<0, n\in\mathbf{N}^*$

- Orice funcție rațională se poate descompune, în mod unic, în suma de funcții raționale simple

D_4: Fie $F:I\to\mathbf{R}$ o primitiva a functiei continue $f:I\to\mathbf{R}$. Se numeste integrala definită a funcției *f* de la *a* la *b*, numărul real notat şi definit prin relatia $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ (formula Leibniz-Newton)

$-\int_a^b(\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx, (\forall)\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}$

$-(\forall)\ c\in I, \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$-(\exists)\ c\in(a,b)\ a.i. \int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

$-$ *Daca* $f\geq 0$ *pe* $[a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

$-$ *Daca* $f\leq g$ *pe* $[a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

$-$*Daca* $m,M\in\mathbf{R}$ sunt astfel încât $m\leq f(x)\leq M, (\forall)\ x\in[a,b]$, atunci $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

$$-\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

D₅: Fie $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$ şi funcţia continuă pozitivă $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+$.

Multimea $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$ se numeşte subgraficul funcţiei *f*..

D₉: Funcţia $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ se numeşte continuă pe porţiuni dacă are cel mult un număr finit, nenul, de puncte de discontinuitate şi acestea sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi.

-Fie $f,g:[a,b]\to R$ astfel încât $f(x)=g(x), (\forall)\, x\in(a,b)$ şi *g* este continuă. Atunci *f* este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

-O funcţie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ continuă pe porţiuni este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{p}\int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(x)dx$, unde $f_i:[c_{i-1},c_i]\to\mathbf{R}, i=\overline{1,p}$ sunt funcţiile asociate lui *f*.

-Fie $f,g:I\to R$ derivabile cu derivate continue. Dacă $a,b\in I$, atunci:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx.$$

-Dacă $\varphi:I\to I$ este derivabila, cu derivata continuă şi $f:I\to\mathbf{R}$ este continuă, dacă $a,b\in I$, atunci

$$\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

-Fie $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$ continue a.i. $g(x)\le f(x), (\forall)\, x\in[a,b]$ .Dacă $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 / a\le x\le b, g(x)\le y\le f(x)\}$, atunci aria $(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$.

-Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ continuă. Mulţimea $V=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / \sqrt{y^2+z^2}\le|f(x)|\right\}$ se numeşte corpul de rotaţie în jurul axei *Ox* determinat de funcţia *f*. Volumul acestui corp este $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

-Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă. Lungimea graficului funcţiei este $l(f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

-Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}_+$ continuă. $\phi=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 / \sqrt{y^2+z^2}=f(x), a\le x\le b\right\}$ se numeste suprafaţa de rotaţie daterminată de funcţia *f*. Aria acestei suprafeţe este $A(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2+e^x,\ x\le 0\\ \sqrt{x}+1,\ x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe **R**.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} xf(x)dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbf{R},\ g(x)=f(x)$.

R. a) O funcție admite primitive dacă este continuă pe domeniul de definiție. Problema continuității se pune în punctul $x_0=0$. Calculăm limitele laterale:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2+e^x\right)=0^2+e^0=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{0}+1=1$ și $f(0)=1$. Acestea sunt egale și atunci funcția este continuă pe **R,** deci admite primitive pe **R**.

b) $$\int_{-1}^{0} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} x\left(x^2+e^x\right)dx=\int_{-1}^{0} x^3dx+\int_{-1}^{0} xe^xdx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0} x\cdot\left(e^x\right)'dx=0-\frac{(-1)^4}{4}\overset{\text{int. prin părți}}{+}$$

$$+\left.xe^x\right|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0} x'\cdot e^xdx=-\frac{1}{4}+0\cdot e^0-(-1)e^{-1}-\int_{-1}^{0} e^xdx=-\frac{1}{4}+\frac{1}{e}-\left.e^x\right|_{-1}^{0}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{e}-e^0+e^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{e}-1+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}-\frac{5}{4}=\frac{8-5e}{4e}.$$

c) Formula pentru calculul volumului este: $Vol\left(C_f\right)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$. Avem

$$Vol\left(C_g\right)=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx=\pi\left(\int_0^1 xdx+2\int_0^1\sqrt{x}dx+\int_0^1 1dx\right)=$$

$$=\pi\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx+\left.x\right|_0^1\right)=\pi\left(\frac{1}{2}+2\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1+1\right)=\left(\frac{1}{2}+2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+1\right)\pi=\frac{3+4+6}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi.$$

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ date prin $f(x)=xe^x$ și $F(x)=(x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$ pentru orice x>1.

R. a) $F'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=e^x(1+x-1)=xe^x$.

b) $Aria_{\Gamma_f}=\int_0^1 f(x)dx=\left.F(x)\right|_0^1=F(1)-F(0)=(1-1)e^1-(0-1)e^0=1$.

c) $$\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)'=\frac{\left(f'(t)\right)'\cdot f(t)-f'(t)\cdot\left(f(t)\right)'}{f^2(t)}=\frac{f''(t)\cdot f(t)-f'(t)\cdot f'(t)}{f^2(t)}=\frac{f(t)\cdot f''(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)},$$

unde $f'(x)=x'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x(1+x)$.

$$\int_1^x \frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt = \int_1^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)' dt = \frac{f'(t)}{f(t)}\Bigg|_1^x = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{\cancel{e^x}(x+1)}{x\cancel{e^x}} - \frac{\cancel{e^1}(1+1)}{1\cdot\cancel{e^1}} =$$
$$= \frac{x+1}{x} - 2.$$

3. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases} e\cdot e^x, & x\le -1 \\ 2+x, & x>-1\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe **R**.
b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)$, $x\in[0,2]$.
c) Să se calculeze $\int_{-2}^{0}\frac{xf(x)}{e}dx$.

R. a) Determinăm continuitatea funcției în punctul $x_0=-1$. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} e\cdot e^x = e\cdot e^{-1} = e^0 = 1$;

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} (2+x) = 2-1=1$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = 1 \Rightarrow$ funcția este continuă în $x_0=-1$ şi este continuă pe **R**, deci admite primitive pe **R**.

b) Volumul se calculează după formula: $Vol(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

$$Vol(C_g)=\pi\int_0^2(2+x)^2dx=\pi\int_0^2(4+4x+x^2)dx=\pi\left(4x+4\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\pi\left(4\cdot2+2\cdot2^2+\frac{2^3}{3}\right)=$$
$$=\pi\left(8+8+\frac{8}{3}\right)=\frac{24+24+8}{3}\pi=\frac{56}{3}\pi.$$

c) $$\int_{-2}^{0}\frac{xf(x)}{e}dx=\int_{-2}^{-1}xe^xdx+\frac{1}{e}\int_{-1}^{0}(2x+x^2)dx=\int_{-2}^{-1}x(e^x)'dx+\frac{1}{e}\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=xe^x\Big|_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}e^xdx-\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{3}\right)=$$
$$=xe^x\Big|_{-2}^{-1}-e^x\Big|_{-2}^{-1}-\frac{2}{3e}=e^x(x-1)\Big|_{-2}^{-1}-\frac{2}{3e}=-2e^{-1}+3e^{-2}-\frac{2}{3}e^{-1}=3e^{-2}-\frac{8}{3}e^{-1}=\frac{3}{e^2}-\frac{8}{3e}=\frac{9e-8}{3e^2}.$$

4. Se consideră funcția $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 g(x)dx$.

b) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_1^a\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^xdx=6e^a$.

c) Să se calculeze $\int_0^1\left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx$.

R. a) $$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left((x+1)^3-3x^2-1\right)dx=\int_0^1\left(x^3\cancel{+3x^2}+3x\cancel{+1}\cancel{-3x^2}\cancel{-1}\right)dx=\int_0^1\left(x^3+3x\right)dx=$$
$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}.$$

b) $g(x)=x^3+3x$ şi $\int_1^a \left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x dx=\int_1^a \left(x^3+3x-x^3\right)\cdot e^x dx=\int_1^a 3xe^x dx=3\int_1^a x\left(e^x\right)' dx=$

$$=3\left(xe^x\Big|_1^a-\int_1^a x' e^x dx\right)=3\left(ae^a-e-\int_1^a e^x dx\right)=3\left(ae^a-e-e^x\Big|_1^a\right)=3\left(ae^a\cancel{-e}-e^a\cancel{+e}\right)=3e^a(a-1).$$

Obţinem $3e^a(a-1)=6e^a \Big| :3e^a \quad \Rightarrow a-1=2\Rightarrow a=3$.

c) $\int_0^1 \left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx=\int_0^1 g^{2009}(x)\cdot g'(x)dx=g^{2009}(x)\Big|_0^1 \overset{g(x)=x^3+3x}{=}$

$$=\left(1^3+3\cdot 1\right)^{2009}-\left(0^3+3\cdot 0\right)^{2009}=4^{2009}.$$

5. Se consideră funcţia : $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$.

a) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

b) Folosind faptul că $x^2+e^{-x^2}\geq 1$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\frac{2}{3}$.

c) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia, în jurul axei Ox , a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $g(x)=f(x)+f(-x)$.

R. a) $Aria\left(\Gamma_f\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+e^{-x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-e^{-x}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-e^{-1}-\left(\frac{0}{2}-e^0\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$.

b) Din $x^2+e^{-x^2}\geq 1$ obţinem $e^{-x^2}\geq 1-x^2$ şi integrăm inegalitatea pe intervalul $[0,1]$ $\Rightarrow$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

c) $g(x)=f(x)+f(-x)=x+e^{-x}-x+e^x=e^{-x}+e^x$ şi volumul este dat de: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{-x}+e^x\right)^2 dx=\pi\int_0^1\left(e^{-2x}+2+e^{2x}\right)dx=\pi\left(-\frac{e^{-2x}}{2}+2x+\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{-e^{-2}+4+e^2}{2}-\frac{-e^0+e^0}{2}\right)=\frac{e^2+4-e^{-2}}{2}\pi.$$

6. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+e^x+1$.

a) Să se arate că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx=e+\frac{1}{3}$.

R. a) O primitivă a funcţiei f este $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, astfel încât $F'(x)=f(x)$ şi $f(x)=x^2+e^x+1>0$ ca sumă de funcţii pozitive $\Rightarrow$ $F'(x)>0$. Dacă derivata este pozitivă atunci funcţia este crescătoare, adică F este funcţie crescătoare $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x^2+e^x+1\right)dx = \int_0^1 \left(x^3+xe^x+x\right)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4}+e^x(x-1)+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1 =$

$$\int xe^x\,dx = \int x\left(e^x\right)'dx \overset{\substack{\text{int } prin\\ părți}}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1)+C$$

$= \frac{1}{4}+e^1(1-1)+\frac{1}{2}-e^0(0-1) = \frac{3}{4}+1 = \frac{7}{4}$.

c) $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln^2 x + e^{\ln x}+1}{x}dx = \int_1^e\left(\frac{\ln^2 x}{x}+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx = (*)$. Calcuăm primitivele separat:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}dx = \int \ln^2 x\cdot(\ln x)'dx \overset{\substack{schimbare\\ de\,\mathrm{var}\,iabilă}}{=} \frac{\ln^3 x}{3}+C$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\cdot(\ln x)'dx = \frac{\ln^2 x}{2}+C;\quad \int\frac{1}{x}dx = \ln x + C.$$

$$(*) = \left.\left(\frac{\ln^3 x}{3}+\frac{\ln^2 x}{2}+\ln x\right)\right|_1^e = \frac{\ln^3 e}{3}+\frac{\ln^2 x}{2}+\underbrace{\ln e}_{=1}-\frac{\ln^3 1}{3}-\frac{\ln^2 1}{2}-\underbrace{\ln 1}_{=0} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1 = \frac{2+3+6}{6} = \frac{11}{6}.$$

7. Se consideră funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x)\,dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) Să se determine numărul real $a\in(1,e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox, dreptele de ecuații $x=a$ și $x=e^2$ să fie egală cu $\ln\frac{3}{2}$.

R. a) $\int_1^e f'(x)\,dx = f(x)\Big|_1^e = \left.\left(\frac{1}{x(1+\ln x)}\right)\right|_1^e = \frac{1}{e(1+\ln e)}-\frac{1}{1(1+\ln 1)} = \frac{1}{e(1+1)}-\frac{1}{1} = \frac{1}{2e}-1$.

b) Fie $F:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$ primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x), \forall x\in[1,+\infty)$. Din $x\in[1,+\infty)\Rightarrow x>0$, $\ln x\geq 0$ și atunci $f(x)\geq 0$. Dacă derivata unei funcții $F'(x)=f(x)\geq 0$ atunci functia F este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) $Aria\left(\Gamma_f\right) = \int_a^{e^2} f(x)\,dx = \int_a^{e^2}\frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_a^{e^2}\frac{1}{1+\ln x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int_a^{e^2}\frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}dx = \ln(1+\ln x)\Big|_a^{e^2} =$

$= \ln\left(1+\ln e^2\right)-\ln(1+\ln a) = \ln(1+2)-\ln(1+\ln a) = \ln 3 - \ln(1+\ln a) = \ln\frac{3}{1+\ln a}$.

Din $Aria\left(\Gamma_f\right) = \ln\frac{3}{2}$ obținem: $\frac{3}{1+\ln a} = \frac{3}{2} \Rightarrow 1+\ln a = 2 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e \in \left(1,e^2\right)$

8. Se consideră funcțiile $f,g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ date prin $f(x)=e^x$ și $g(x)=\frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze primitivele funcției $f+g$.

b) Să se arate că $\int_1^2\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx = \frac{e^4-e^2+1}{2}$.

c) Folosind eventual faptul că $2ab\le a^2+b^2$, pentru orice $a,b\in\mathbf{R}$, să se demonstreze că

$$\int_1^2 e^x\cdot\frac{1}{x}dx\le\frac{e^4-e^2+1}{4}.$$

R. a) $\int(f+g)(x)dx=\int\left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x dx+\int\frac{1}{x}dx=e^x+\ln x+C$.

b) $\int_1^2\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\int_1^2\left(e^{2x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left.\left(\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{x}\right)\right|_1^2=\frac{e^4}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{e^2}{2}-1\right)=$

$=\frac{e^4-e^2-1+2}{2}=\frac{e^4-e^2+1}{2}$.

c) $f(x), g(x)\in\mathbf{R}$, folosind relația $2ab\le a^2+b^2$ avem $2\cdot f(x)\cdot g(x)\le f^2(x)+g^2(x)$. Integrăm inegalitatea pe intervalul $[1,2]$ şi obținem:

$$2\int_1^2 f(x)\cdot g(x)dx\le 2\int_1^2\left(f^2(x)+g^2(x)\right)dx=\frac{e^4-e^2+1}{2}\Rightarrow\int_1^2 f(x)\cdot g(x)dx\le\frac{e^4-e^2+1}{4}.$$

9. Se consideră integralele $I_n=\int_0^1\frac{x^n+1}{x+1}dx$ pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Folosind, eventual, faptul că $x^2\le x$, pentru orice $x\in[0,1]$, să se demonstreze că $I_2\le I_1$.

c) Să se demonstreze că $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}+2\ln 2$ pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

R. a) Pentru n=1 se obține: $I_1=\int_0^1\frac{x+1}{x+1}dx=\int_0^1 1dx=\left.x\right|_0^1=1$.

b) $I_2=\int_0^1\frac{x^2+1}{x+1}dx$. Din $x^2\le x$, $\forall x\in[0,1]$ se obține $x^2+1\le x+1\Rightarrow\frac{x^2+1}{x+1}\le\frac{x+1}{x+1}$, $\forall x\in[0,1]$; integrăm pe intervalul $[0,1]$ şi se obține $\int_0^1\frac{x^2+1}{x+1}dx\le\int_0^1\frac{x+1}{x+1}dx\Rightarrow I_2\le I_1$.

c) $I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}+1}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^n+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}+1}{x+1}+\frac{x^n+1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{x^{n+1}+1+x^n+1}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)+2}{x+1}dx=$

$=\int_0^1\left(x^n+\frac{2}{x+1}\right)dx=\left.\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+2\ln(x+1)\right)\right|_0^1=\frac{1}{n+1}+2\ln 2-2\ln 1=\frac{1}{n+1}+2\ln 2$.

10. Se consideră funcțiile f, g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ şi $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

a) Să se verifice că funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

R. a) $g'(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)'=\frac{2e^{2x}\cdot e^x-\left(e^{2x}-1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\cancel{e^x}\cdot\left(2e^{2x}-e^{2x}+1\right)}{e^x\cancel{\left(e^x\right)^2}}=\frac{e^{2x}+1}{e^x}=f(x)$, adică g este o primitivă a lui f.

b) $f(x)g(x)=\left(\frac{e^{2x}+1}{e^x}\right)\cdot\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)=\frac{e^{4x}-1}{e^{2x}}=e^{2x}-e^{-2x}$ şi

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)dx=\left(\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{e^2}{2}+\frac{e^{-2}}{2}-\left(\frac{e^0}{2}+\frac{e^0}{2}\right)=\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2}-1.$$

c) $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}+\frac{1}{e^x}=e^x+e^{-x}\Rightarrow f'(x)=\left(e^x\right)'+\left(e^{-x}\right)'=e^x+(-x)'e^{-x}=e^x-e^{-x}$

$g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{1}{e^x}=e^x-e^{-x}\Rightarrow\ g'(x)=\left(e^x\right)-\left(e^{-x}\right)=e^x+e^{-x}$

şi atunci $f(x)\cdot g(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)=e^{2x}-e^{-2x}$

$f'(x)\cdot g'(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)=e^{2x}-e^{-2x}\Rightarrow$

$$f(x)\cdot g(x)=f'(x)\cdot g'(x)\Rightarrow\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

11. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$.

a) Să se calculeze $\int_1^e\left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right)dx$.

b) Să se verifice că $\int_1^e f(x)dx=\frac{e^2}{2}$.

c) Să se arate că şirul care are termenul general $I_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right)dx,\ n\geq 1$ este o progresie aritmetică cu raţia 1.

R. $\int_1^e\left(f(x)-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}+x-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^e xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{e^2-1}{2}$.

b) $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}+x\right)dx=\int_1^e\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+\int_1^e xdx=\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'dx+\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^e=\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^e+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=$

$=\frac{\ln^2 e}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=\cancel{\frac{1}{2}}-0+\frac{e^2}{2}-\cancel{\frac{1}{2}}=\frac{e^2}{2}.$

c) Dacă diferenţa a doi termeni consecutivi este constantă atunci este progresie aritmetică.

$I_{n+1}-I_n=\int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}}\left(f(x)-x\right)dx-\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-x\right)dx=\int_{e^{n+1}}^{e^{n+2}}\frac{\ln x}{x}dx-\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{e^{n+1}}^{e^{n+2}}-\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_{e^n}^{e^{n+1}}=$

$=\frac{\ln^2 e^{n+2}-\ln^2 e^{n+1}}{2}-\frac{\ln^2 e^{n+1}-\ln^2 e^n}{2}=\frac{(n+2)^2-(n+1)^2-(n+1)^2+n^2}{2}=$

$=\frac{\cancel{n^2}+\cancel{4n}+4\cancel{-n^2}\cancel{-2n}-1\cancel{-n^2}\cancel{-2n}-1\cancel{+n^2}}{2}=\frac{2}{2}=1$ şi atunci $r=1$.

12. Se consideră funcțiile $f_m :[0,1] \to \mathbf{R}$ definite prin $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)\,x+1$, unde $m\in\mathbf{R}$.

a) Să se calculeze $\int f_1(x)\,dx$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x)\,dx$.

c) Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

R. a) $\int f_1(x)\,dx = \int\left(x^2+x+1\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

b) $\int_0^1 e^x f_0(x)\,dx = \int_0^1 e^x(x+1)\,dx = \int_0^1 (x+1)\left(e^x\right)'\,dx \overset{\text{int. prin prti}}{=} (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$.

$= 2e-1-e^x\Big|_0^1 = 2e-1-e+1 = e$

c) $\int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1\left(m^2x^2+\left(m^2-m+1\right)x+1\right)dx = \left(m^2\frac{x^3}{3}+\left(m^2-m+1\right)\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1 =$

$= \frac{m^2}{3}+\frac{m^2-m+1}{2}+1 = \frac{2m^2+3m^2-3m+3+6}{6} = \frac{5m^2-3m+9}{6}$ şi

$\frac{5m^2-3m+9}{6} = \frac{3}{2}\Big|\cdot 6 \Rightarrow 5m^2-3m+9=9 \Rightarrow \ 5m^2-3m=0 \Rightarrow m\left(5m-3\right)=0 \Rightarrow m_1=0,\ m_2=\frac{3}{5}$. Din

$m\in\mathbf{R}^* \Rightarrow\ m\in\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

13. Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}\,dx$.

a) Să se verifice că $I_0 =1$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Folosind, eventual, faptul că $1\le \ln x \le 2,\ \forall x\in\left[e,e^2\right]$, să se demonstreze că $1\le\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\le 2^n, \forall n\in\mathbf{N}$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

R. a) $I_0 = \int_e^{e^2}\frac{\ln^0 x}{x}\,dx = \int_e^{e^2}\frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_e^{e^2} = \ln e^2-\ln e = 2-1 = 1$.

b) $I_1 = \int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx = \int_e^{e^2}\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_e^{e^2}\ln x\cdot\left(\ln x\right)'\,dx = \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_e^{e^2} = \frac{\ln^2 e^2}{2}-\frac{\ln^2 e}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$.

c) Din $1\le \ln x \le 2,\ \forall x\in\left[e,e^2\right]$ prin ridicare la puterea $n\in\mathbf{N}\Rightarrow\ 1^n \le \ln^n x \le 2^n\Big| : x \overset{x\in[e,e^2]}{\Rightarrow} \frac{1}{x}\le\frac{\ln^n x}{x}\le\frac{2^n}{x}$ şi

integrăm inegalitatea pe $\left[e,e^2\right] \Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx \le \int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}\,dx \le \int_e^{e^2}\frac{2^n}{x}dx \Rightarrow \ln x\Big|_e^{e^2} \le \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}\Bigg|_e^{e^2} \le 2^n \ln x\Big|_e^{e^2} \Rightarrow$

$= \ln e^2-\ln e \le \frac{\ln^{n+1} e^2-\ln^{n+1} e}{n+1} \le 2^n\left(\ln e^2-\ln^e\right) \Rightarrow 2-1 \le \frac{2^{n+1}-1^{n+1}}{n+1} \le 2^n\left(2-1\right) \Rightarrow 1\le\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\le 2^n$.

14. Se consideră funcția $f:[-4,4]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x)dx$.

b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)}dx=0$.

c) Să se demonstreze că $0\le\int_0^m f(x)dx\le 8$, oricare ar fi $m\in[0,2]$.

R. a) $\int_0^4 f^2(x)dx=\int_0^4\left(16-x^2\right)dx=\left.\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^4=16\cdot 4-\frac{4^3}{3}=\frac{192-64}{3}=\frac{128}{3}$.

b) $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)}dx=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx=-\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}dx=-\left.\sqrt{16-x^2}\right|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}=-\left(\sqrt{16-5}-\sqrt{16-5}\right)=0$, sau

determinăm paritatea funcției $g:\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]\to\mathbf{R}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$:

$g(-x)=\frac{-x}{\sqrt{16-(-x)^2}}=-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}=-g(x)$, funcție impară pe intervalul simetric $\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]\Rightarrow$

$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x}{f(x)}dx=0$.

c) Considerăm expresiile $4+x$ şi $4-x$, unde $x\in[0,m]$, care sunt pozitive şi aplicăm inegalitatea mediilor:
$0\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\Rightarrow\ 0\le\sqrt{(4+x)(4-x)}\le\frac{4+x+4-x}{2}\Rightarrow 0\le\sqrt{16-x^2}\le 4$. Integrăm inegalitatea pe

intervalul $[0,m]$, se obține: $0\le\int_0^m\sqrt{16-x^2}dx\le\int_0^m 4dx\Rightarrow 0\le\int_0^m f(x)dx\le \left.4x\right|_0^m=4m$, dar $m\le 2$ şi atunci

$4m\le 8$ şi avem $0\le\int_0^m f(x)dx\le 8$.

15. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ definită prin $f(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$.

a) Să se verifice că $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=e-1$.

b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=xe^{-x}f(x)$, axa Ox şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se calculeze $\int_{-1}^1\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx$.

R. a) $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\frac{e^x\cancel{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}dx=\int_0^1 e^xdx=\left.e^x\right|_0^1=e^1-e^0=e-1$.

b) $g(x)=x\cdot e^{-x}\cdot e^{x}\cdot\sqrt{x^2+1}=x\cdot e^{-x+x}\cdot\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{x^2+1}$ şi

$$Aria(\Gamma_g)=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\left.\sqrt{(x^2+1)^3}\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{(1^2+1)^3}-\sqrt{(0^2+1)^3}\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{8}-\sqrt{1}\right)=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

c) $$\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+1}\cdot e^x\cdot\sqrt{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}e^x(x^2+1)dx\overset{\text{int prin părți}}{=}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\cdot(e^x)'dx=$$

$$=(x^2+1)e^x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2xe^xdx=2e-2e^{-1}-2\int_{-1}^{1}x(e^x)'dx=2e-2e^{-1}-2\left(xe^x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^xdx\right)=$$

$$=2e-2e^{-1}-2\left(e+e^{-1}-e^x\Big|_{-1}^{1}\right)=2e-2e^{-1}-2\left(e+e^{-1}-e+e^{-1}\right)=2e-6e^{-1}=2\left(e-\frac{3}{e}\right).$$

16. Se consideră integralele $I_n=\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}dx$, $n\in$**N.**

a) Să se verifice că $I_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2}-I_n=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n\in$**N**.

R. a) $$I_0=\int_2^3\frac{x^0}{x^2-1}dx=\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{1}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

b) $$I_1=\int_2^3\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)\Big|_2^3=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$$

c) $$I_{n+2}-I_n=\int_2^3\frac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3\left(\frac{x^{n+2}}{x^2-1}-\frac{x^n}{x^2-1}\right)dx=\int_2^3\frac{x^{n+2}-x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3\frac{x^n\cancel{(x^2-1)}}{\cancel{x^2-1}}dx=$$

$$=\int_2^3x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_2^3=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1},\ \forall\, n\in\mathbf{N}.$$

17. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to$**R** definită prin $f(x)=\ln x-x$.

a) Să se calculeze $\int_1^2\left(x-f(x)+\ln x\right)^2dx$.

b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcţiei f este concavă pe intervalul $(1,+\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei $h:[1,e]\to$**R**, $h(x)=f(x)+x$, axa Ox şi dreptele $x=1$ şi $x=e$.

R. a) $\int_1^2 \left(x - f(x) + \ln x\right)^2 dx = \int_1^2 \left(\cancel{x - \ln x} + x + \cancel{\ln x}\right)^2 dx = \int_1^2 (2x)^2 dx = 4\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 =$

$= 4\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = 4\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{3}.$

b) F primitivă a funcției f, atunci $F'(x) = f(x)$ şi $F''(x) = f'(x)$ şi $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Tabelul de semn:

x	0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$F''(x)=f'(x)$	+ + + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - -

Pe $(1,+\infty)$, $F''(x) \le 0 \Rightarrow F$ este concavă pe $(1,+\infty)$.

c) $h:[1,e]\to\mathbf{R}$, $h(x)= f(x)+x = \ln x - x + x = \ln x$ şi

$Aria(\Gamma_h) = \int_1^e h(x)dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e \ln x \cdot (x)' dx \overset{\text{int. prin parti}}{=} x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e\ln e - 1\cdot \ln 1 - \int_1^e 1dx =$

$= e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$

18. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x) = e^x + \ln x$.

a) Ştiind că $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\ g(x) = f(x) - \ln x$, să se verifice că $\int g(x)dx = g(x) + C,\ x>0$.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^e xf(x^2)dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$.

R. a) $g(x) = f(x) - \ln x = e^x + \ln x - \ln x = e^x$ şi $\int g(x)dx = \int e^x dx = e^x + C = g(x) + C,\ \forall x > 0$.

b) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (e^x + \ln x)dx = \int_1^e e^x dx + \int_1^e \ln x dx = e^x\Big|_1^e + \int_1^e \ln x \cdot (x)' dx = e - e^0 \overset{\text{int. prin părți}}{+}$

$+ x\ln x\Big|_0^1 - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x dx = e - 1 + e\underbrace{\ln e}_{=1} - 1\cdot\underbrace{\ln 1}_{=0} - \int_1^e 1dx = e - 1 + e - 0 - x\Big|_1^e = 2e - 1 - e + 1 = e.$

c) $\int_1^e xf(x^2)dx = \int_1^e x\left(e^{x^2} + \ln x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^e e^{x^2}(x^2)' dx + \frac{1}{2}\int_1^e \ln x^2 \cdot (x^2)' dx \overset{\text{schimb. de variabilă}}{=}$

$= \frac{1}{2}\left(e^{x^2} + x^2\ln x^2 - x^2\right)\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(e^{e^2} + e^2\underbrace{\ln e^2}_{=2} - e^2 - e^{1^2} - 1^2\underbrace{\ln 1^2}_{=0} + 1^2\right) = \frac{e^{e^2} + 2e^2 - e^2 - e + 1}{2} =$

$= \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}.$

$\underbrace{\int \ln x^2 \cdot (x^2)' dx}_{u=x^2,\ du=(x^2)'dx} = \int \ln u\, du = \int \ln u \cdot (u)' du \underset{\text{int. prin părți}}{=} u\ln u - \int u\cdot\frac{1}{u}du = u\ln u - u + C = x^2\ln x^2 - x^2 + C.$

19. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=-\frac{22}{81}$.

R. a) $\int_1^e x\left(f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\int_1^e x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\int_1^e x\cdot\frac{1}{x^2}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=$

$=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$

b) Fie $F:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $F'(x)=f(x)$ primitivă a funcției f. Atunci

$f(x)=\frac{(x+1)^2-x^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+1-x^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\geq 0,\ \forall x\in(0,+\infty)\Rightarrow F'(x)\geq 0$ și atunci funcția F este crescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) $\int_1^2 f'(x)f(x)dx=\int_1^2 f(x)f'(x)dx=\frac{f^2(x)}{2}\Big|_1^2=\frac{f^2(2)-f^2(1)}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(2+1)^2}\right)^2-\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(1+1)^2}\right)^2\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)^2-\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}-1+\frac{1}{4}\right)\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{1}{9}+1-\cancel{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{-22}{\cancel{36}\,9}\cdot\frac{\cancel{8}\,4}{9}=-\frac{22}{81}$.

20. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite prin $f(x)=e^{-x}$ și $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

a) Să se arate că $F(x)=-f(x)+1$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.
b) Să se demonstreze că funcția $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h(x)=F(x)-f(x)$ este concavă pe $\mathbf{R}$.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx$.

R. a) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^x=-e^{-x}+e^0=-e^{-x}+1=-f(x)+1$.

b) $h(x)=F(x)-f(x)=-f(x)+1-f(x)=1-2f(x)$ și $h(x)=-2f'(x)$, iar $h''(x)=-2f''(x)$.

$f'(x)=\left(e^{-x}\right)'=(-x)'\cdot e^{-x}=-e^{-x}$ și $f''(x)=\left(-e^{-x}\right)'=-(-x)'\cdot\left(e^{-x}\right)=e^{-x}$. Cum $e^{-x}>0,\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x)>0\Rightarrow h''(x)<0$ și h este concavă pe $\mathbf{R}$.

c) $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx=\int_0^1 x\cdot e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(-x^2\right)'\cdot e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\left(e^{-1^2}-e^0\right)=-\frac{1}{2}\left(e^{-1}-1\right)=.$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)=-\frac{1-e}{2e}=\frac{e-1}{2e}$.

21. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$.

a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbf{R},\ g(x)=3^{-x}$.

c) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$ şi convexă pe $[0,+\infty)$.

R. a) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(3^x+3^{-x}\right)dx=\left(\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{3^1}{\ln 3}-\frac{3^{-1}}{\ln 3}-\left(\frac{3^{-1}}{\ln 3}-\frac{3^1}{\ln 3}\right)=$

$=\frac{3-3^{-1}-3^{-1}+3}{\ln 3}=\frac{6-\frac{2}{3}}{\ln 3}=\frac{16}{3\ln 3}$.

b) $Vol\left(C_g\right)=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 3^{-2x}\,dx=\frac{\pi}{-2}\int_0^1 3^{-2x}\cdot(-2x)'\,dx=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3^{-2x}}{\ln 3}\Big|_0^1=-\frac{\pi}{2}\left(\frac{3^{-2}-3^0}{\ln 3}\right)=$

$=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{1}{9}-1}{\ln 3}=-\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot\frac{-\frac{\cancel{8}}{9}}{\ln 3}=\frac{4\pi}{9\ln 3}$.

c) Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, primitivă a lui f pe $\mathbf{R}$, atunci $F'(x)=f(x)$ şi $F''(x)=f'(x)$,

$f'(x)=3^x\ln 3-3^{-x}\ln 3=\ln 3\left(3^x-3^{-x}\right)$ şi tabelul de semn pentru derivată:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$F''(x)=f'(x)$	- - - - - - - - - - - - - - -0 + + + + + + + + + + +

Pe $(-\infty,0]$, $F''(x)\le 0\Rightarrow F$ este concavă, iar pe $[0,+\infty)$, $F''(x)\ge 0\Rightarrow F$ este convexă.

22. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $\int_2^e\left(f(x)-\frac{1}{x-1}\right)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este convexă pe $[2,+\infty)$.

c) Să se determine $a>2$ astfel încât aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f axa Ox şi dreptele de ecuații $x=2$ şi $x=a$ să fie egală cu ln 3.

R. a) $\int_2^e\left(f(x)-\frac{1}{x-1}\right)dx=\int_2^e\left(\frac{1}{x}+\cancel{\frac{1}{x-1}}-\cancel{\frac{1}{x-1}}\right)dx=\int_2^e\frac{1}{x}\,dx=\ln x\big|_2^e=\ln e-\ln 2=1-\ln 2$.

b). F este concavă dacă $F''(x)\le 0$ pe $[2,+\infty)$. Calculăm derivata a doua a funcției F: $F'(x)=f(x)$ şi

$F''(x)=f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)>0,\forall x\in[2,+\infty)$ şi atunci F'' este concavă pe $[2,+\infty)$.

c) $Aria\left(\Gamma_f\right)=\int_2^a f(x)\,dx=\ln x+\ln(a-1)-\ln 2=\ln\frac{a(a-1)}{2}$ şi $Aria(\Gamma_f)=\ln 3\Rightarrow$

$\ln\frac{a(a-1)}{2}=\ln 3\Rightarrow\frac{a(a-1)}{2}=3\Rightarrow a^2-a=6\Rightarrow a^2-a-6=0$

$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow\Delta=25\Rightarrow\sqrt{\Delta}=5$, $\quad a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{1-5}{2}=-2\\ a_2=\frac{1+5}{2}=3\end{cases}$.

Cum $a>2$, valoarea cerută este $a=3$.

23. Se consideră funcțiile $f, F : [1, +\infty)\to\mathbf{R}$, date prin $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ şi $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 f\left(e^x\right)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x)dx = \frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$

R. a) $F'(x) = (x+1)'\ln x + (x+1)(\ln x)' - x' + 1' = \ln x + (x+1)\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x + \frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}}{x} =$

$= \ln x + \frac{1}{x} = f(x)$.

b) $\int_1^2 f\left(e^x\right)dx = F\left(e^x\right)\Big|_1^2 = \left(\left(e^x+1\right)\ln e^x - e^x + 1\right)\Big|_1^2 = \left(e^2+1\right)\ln e^2 - e^2 + 1 - \left[(e+1)\ln e - e + 1\right] =$

$= \left(e^2+1\right)\cdot 2 - e^2 \cancel{+1} - (e+1)\cdot 1 + e \cancel{-1} = 2e^2 + 2 - e^2 \cancel{-e} - 1 \cancel{+e} = e^2 + 1$.

c) $\int_1^2 f(x)F(x)dx = \int_1^2 F(x)F'(x)dx = \frac{F^2(x)}{2}\Big|_1^2 = \frac{\left((2+1)\ln 2 - 2 + 1\right)^2 - \overbrace{(2\ln 1 - 1 + 1)^2}^{=0}}{2} =$

$= \frac{(3\ln 2-1)^2}{2}$.

24. Se consideră integralele $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx,\ n\in\mathbf{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_1 = e^2$.

c) Să se arate că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e\left(2^{n+1}e - 1\right)$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

R. a) $I_0 = \int_1^2 x^0 e^x dx = \int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1)$.

b) $I_1 = \int_1^2 xe^x dx = \int_1^2 x\left(e^x\right)'dx \overset{\substack{\text{int. prin}\\ \text{părți}}}{=} xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 x'e^x dx = 2e^2 - e - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 =$

$= 2e^2 \cancel{-e} - e^2 \cancel{+e} = e^2$.

c) $I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1}e^x dx = \int_1^2 x^{n+1}\left(e^x\right)'dx = x^{n+1}e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(x^{n+1}\right)'e^x dx = 2^{n+1}e^2 - 1^{n+1}e - (n+1)\int_1^2 x^n e^x dx \Rightarrow$

$I_{n+1} = 2^{n+1}e^2 - e - (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = 2^{n+1}e^2 - e = e\left(2^{n+1}e - 1\right)$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$.

25. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ de forma $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ unde $m,n,p\in\mathbf{R}$

a) Pentru $m = 0$, $n = -3$, $p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se determine $m,n,p\in\mathbf{R}$ ştiind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ şi că $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 4$.

c) Să se calculeze $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)\,dt$.

R. a) Pentru $m = 0$, $n = -3$, $p = 2$, avem $f(x) = x^3 - 3x + 2$ şi

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^3 - 3x + 2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{1-6+8}{4} = \frac{3}{4}.$$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$ şi

$$\begin{cases} f'(-) = 3 - 2m + n \\ f'(1) = 3 + 2m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2m + n = 0 \\ 3 + 2m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + n = -3 \\ +2m + n = -3 \end{cases}$$

$$2n = -6 \Rightarrow n = -3 \text{ şi } m = 0$$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 4 \Rightarrow \left(\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + px\right)\Bigg|_{-1}^1 = 4 \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + p - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - p\right) = 4 \Rightarrow 2p = 4 \Rightarrow p = 2.$$

c) $$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(t^3 + mt^2 + nt + p\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} + m\frac{t^3}{3} + n\frac{t^2}{2} + pt\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^4}{4} + m\frac{x^3}{3} + n\frac{x^2}{2} + px \text{ şi}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{4}x^4 + m\frac{x^3}{3} + n\frac{x^2}{2} + px}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

26. Se consideră funcţiile $f, g : (0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definite prin $f(x) = 1 + \ln x$ şi $g(x) = x\ln x$.

a) Să se arate că g este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei g, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = e$.

R. a) $g'(x) = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 = f(x) \Rightarrow g$ este o primitivă a funcţiei f.

b) $$\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_1^e g(x)\cdot g'(x)\,dx \overset{\int u\,du = \frac{u^2}{2}+C}{=} \frac{g^2(x)}{2}\Bigg|_1^e = \frac{1}{2}\left(g^2(e) - g^2(1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2\ln^2 e - 1^2\ln^2 1\right) = \frac{1}{2}e^2\cdot 1^2 = \frac{e^2}{2}.$$

c) $$Vol\left(C_f\right) = \pi\int_1^e f^2(x)\,dx = \pi\frac{x^3}{3}\left(\ln^2 x - \frac{2}{3}\ln x + \frac{2}{9}\right)\Bigg|_1^e = \pi\left[\frac{e^3}{3}\left(\ln^2 e - \frac{2}{3}\ln e + \frac{2}{9}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{3}\left(\ln^2 1 - \frac{2}{3}\ln 1 + \frac{2}{9}\right)\right] = \pi\left[\frac{e^3}{3}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\right] = \frac{5e^3 - 2}{27}.$$

Am calculat primitiva:

$$\int f^2(x)dx = \int x^2 \ln^2 x dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx\right) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln^2 x - \frac{2}{3}\ln x + \frac{2}{9}\right) + C.$$

$f(x) = \ln^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3}$	$g'(x) = x^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3}$

27. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^{1004}+2009^x$.

a) Să se determine $\int f(x)dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe **R**.

c) Să se calculeze $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx$.

R. a) $\int f(x)dx = \int\left(x^{1004} + 2009^x\right)dx = \frac{x^{1005}}{1005} + \frac{2009^x}{\ln 2009} + C$.

b) Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcției f, atunci $F'(x) = f(x)$ şi $x^{1004} > 0$, $2009^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, atunci F este funcție crescătoare pe **R**.

c) $\int_0^1 x\cdot f(x^2)dx = \int_0^1 x\cdot\left(x^{2008} + 2009^{x^2}\right)dx = \int_0^1 x^{2009}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot 2009^{x^2}dx = \left.\frac{x^{2010}}{2010}\right|_0^1 +$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 2009^{x^2}\cdot\left(x^2\right)'dx \overset{\int a^u du}{=} \frac{1}{2010} + \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2009^{x^2}}{\ln 2009}\right|_0^1 = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2}\left(\frac{2009}{\ln 2009} - \frac{1}{\ln 2009}\right) = = \frac{1}{2010} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2008}{\ln 2009}.$$

28. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se determine $\int\left(x^2+1\right)\cdot f(x)dx$.

b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)dx = \ln(2e)$.

c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e(e-1)$.

R. a) $\int\left(x^2+1\right)\cdot f(x)dx = \int \cancel{\left(x^2+1\right)}\cdot\frac{x^2+2x+1}{\cancel{x^2+1}}dx = \int\left(x^2+2x+1\right)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$.

b) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}dx = \int_0^1\left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx \overset{\int\frac{u'}{u}du}{=} 1 + \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 =$

$= \ln e + \ln 2 - \ln 1 = \ln(2e)$.

c) $\int_0^1 f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = \int_0^1\left(e^{f(x)}\right)'dx = e^{f(x)}\Big|_0^1 = e^{f(1)} - e^{f(0)} = e^2 - e^1 = e(e-1)$.

29. Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx$ şi $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1}dx$.

a) Să se verifice că $I + J = e - 1$.

b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbf{R}$, să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$.

c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$.

R. a) $I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1}dx = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{x+1} + \frac{xe^x}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{e^x + xe^x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x \cancel{(x+1)}^1}{\cancel{x+1}_1}dx =$

$= \int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$.

b) Luând $e^x \geq x+1 \Big| \cdot x \underset{x\in[0,1]}{\overset{x\geq 0}{\Rightarrow}} xe^x \geq x(x+1) \Big| : (x+1) \underset{x\in[0,1]}{\overset{x+1\geq 0}{\Rightarrow}} \frac{xe^x}{x+1} \geq x \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1}dx \geq \int_0^1 xdx \Rightarrow J \geq \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \Rightarrow J \geq \frac{1}{2}$.

c) Aplicăm metoda integrării prin părți pentru calculul integralei definite I:

$I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\cdot\left(e^x\right)' dx = \frac{e^x}{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{e}{2} - 1 + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx =$

$= \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2}dx.$

30. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Utilizând faptul că $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$ şi $x\in[0,1]$, să se arate că $I_{2009} \geq I_{2008}$.

c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, adevărată pentru orice $n\in\mathbf{N}$ şi $x\in\mathbf{R}$,

să se arate că $I_n = \frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

R. a) $I_1 = \int_0^1 x(1+x)dx = \int_0^1 \left(x + x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

b) Din $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1} \Big| \cdot x,\ x \geq 0 \Rightarrow x(1+x)^n \leq x(1+x)^{n+1}$ şi pentru n = 2008 se obține:

$x(1+x)^{2008} \leq x(1+x)^{2009}$. Integrăm pe intervalul [0,1] $\Rightarrow$

$\int_0^1 x(1+x)^{2008}dx \leq \int_0^1 x(1+x)^{2009}dx \Rightarrow I_{2008} \leq I_{2009} \Rightarrow I_{2009} \geq I_{2008}$.

c) $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx \overset{\substack{aplicam\\ egalitatea}}{\underset{data}{=}} \int_0^1 \left[(1+x)^{n+1} - (1+x)^n\right]dx \overset{u(x)=1+x}{\underset{u'(x)=1}{=}} \left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^1 =$

$= \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+2)\cdot 2^{n+2} - (n+1)\cdot 2^{n+1} - (n+1) + (n+2)}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{2^{n+1}\left(2n\cancel{+2} - n\cancel{-2}\right)\cancel{-n} - 1\cancel{+n} + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

31. Se consideră funcția f:**R**→**R**, $f(x)=xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x)dx = 2e-1$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx$.

R.a) $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = \int_0^1 x\underbrace{e^x \cdot e^{-x}}_{e^0=1}dx = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

b) $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$ şi

$\int_0^1 f''(x)dx = f'(x)\Big|_0^1 = e^x(1+x)\Big|_0^1 = e(1+1) - e^0(1+0) = 2e-1$.

c) $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx = \int_1^2 \frac{x^{\cancel{2}}e^{x^2}}{\cancel{x}}dx = \int_1^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2}\cdot(x^2)'dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4-e) = \frac{e}{2}(e^3-1)$.

32. Se consideră funcţiile $f,g:[0,1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=1-x$, $g(x)=1-x+x^2-x^3+...+x^{2008}-x^{2009}$.

a) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.

b) Să se determine volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x)dx < 1$.

R. a) $\int f(x)dx = \int(1-x)dx = x - \frac{x^2}{2} + C$.

b) $Vol(C_f) = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 (1-x)^2 dx = \pi\left(\int_0^1 1dx - 2\int_0^1 xdx + \int_0^1 x^2dx\right) =$

$= \pi\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

c) $\int_0^1 (x+1)g(x)dx = \int_0^1 (1+x)(1-x+x^2-x^3+...+x^{2008}-x^{2009})dx = \int_0^1 (1-x^{2010})dx =$

$= \left(x - \frac{x^{2011}}{2011}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2011} < 1$.

33. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.

a) Să se calculeze I_1.

b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.

c) Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{x+1} \le x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbf{N}^*$, să se demonstreze că $\frac{1}{2} \le 2010\cdot I_{2009} \le 1$.

R. a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[x - \ln(x+1)\right]\Big|_0^1 = 1 - \ln 2 = \ln\frac{e}{2}$.

b) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx = \int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{x+1} - \frac{x^n}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

c) $\frac{x^n}{2} \le \frac{x^n}{x+1} \le x^n$, $\forall x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbf{N}^* \Rightarrow \frac{x^{2009}}{2} \le \frac{x^{2009}}{x+1} \le x^{2009}$, $\forall x\in[0,1]$ şi folosind monotonia integralei definite obţinem: $\int_0^1 \frac{x^{2009}}{2}dx \le \int_0^1 \frac{x^{2009}}{x+1}dx \le \int_0^1 x^{2009}dx \Rightarrow$

$$\left.\frac{x^{2010}}{2\cdot 2010}\right|_0^1 \le I_{2009} \le \left.\frac{x^{2010}}{2010}\right|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2\cdot 2010} \le I_{2009} \le \frac{1}{2010}\Bigg|\cdot 2010 \Rightarrow \frac{1}{2} \le 2010\cdot I_{2009} \le 1.$$

34. Se consideră funcţiile f, g:$(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$ şi $g(x)=2x+\ln x+1$.

a) Să se arate că f este o primitivă a funcţiei g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = e$.

R. a) f este primitivă a lui g dacă $f'(x) = g(x)$, $\forall\in(0,+\infty)$.

$$f'(x) = (x^2)' + (x\ln x)' = 2x + x'\ln x + x(\ln x)' = 2x + \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 2x + \ln x + 1 = g(x).$$

b) $$\int_1^e f(x)g(x)dx = \int_1^e f(x)\cdot f'(x)dx = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^e = \frac{f^2(e) - f^2(1)}{2} =$$

$$= \frac{e^2 + e\ln e - 1^2 - 1\ln 1}{2} = \frac{e^2 + e - 1}{2}.$$

c)

$$Aria(\Gamma_f) = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e (x^2 + x\ln x)dx = \int_1^e x^2dx + \int_1^e x\ln x dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^e + \left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^e -$$

$$-\int_1^e \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} - \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e =$$

$$= \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{3} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{12}.$$

35. Se consideră funcţiile f,F:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ şi $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$.

a) Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 (xf(x) + F(x))dx = F(1)$.

R. a) $F'(x) = (e^x)' + (x^3)' + 2x' - 1' = \mathrm{e}^x + 3x^2 + 2 = f(x)$.

b) $$\int_0^1 f(x)\cdot F(x)dx = \int_0^1 F'(x)\cdot F(x)dx = \left.\frac{F^2(x)}{2}\right|_0^1 = \frac{F^2(1) - F^2(0)}{2} =$$

$$= \frac{(e\cancel{+1} + 2\cancel{-1})^2 - (e^0 - 1)^2}{2} = \frac{(e+2)^2}{2}.$$

c) $$\int_0^1 (xf(x) + F(x))dx = \int_0^1 (x\cdot F'(x) + x'\cdot F(x))dx = \int_0^1 (x\cdot F(x))dx =$$

$$= x\cdot F(x)\big|_0^1 = 1\cdot F(1) - 0\cdot F(0) = F(1).$$