Identități deduse prin integrare

Teoremă: Fie f,g:**R**→**R**. Dacă f şi g sunt integrabile pe un interval închis $[\alpha,\beta]$ şi $f=g$ pe $[\alpha,\beta]$ atunci şi $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Aplicația 1. Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+...+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1};\ n\in\mathrm{N}$$

Soluție: Fie $f(x)=(1+x)^n$ care este o funcție integrabilă pe $[0,1]$.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1+x)^n dx=\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1} \qquad (1)$$

Pe de altă parte putem scrie (conform cu binomul lui Newton)

$f(x)=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$ rezultă

$$\int_0^1\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n\right)dx=\int_0^1 C_n^0dx+\int_0^1 C_n^1xdx+...+\int_0^1 C_n^nx^ndx=$$

$$=C_n^0x\Big|_0^1+C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+...+C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{C_n^0}{1}+\frac{C_n^1}{2}+...+\frac{C_n^n}{n+1} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă identitatea din enunț.

Aplica]ia 2. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^3-...+\frac{(-1)^n}{m+n+1}C_n^n=\frac{1}{m+n+1}C_{m+n}^n$$

Soluție: Notăm $I_{m,n}=\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx$

Facem schimbarea de variabilă $x-a=t$ şi rezultă:

$I_{m,n}=\int_0^{b-a} t^m(b-a-t)^n dt;$ Fie $b-a=\alpha$

$$I_{m,n}=\int_0^{\alpha} t^m\left[C_n^0\alpha^n-C_n^1\alpha^{n-1}t+C_n^2\alpha^{n-2}t^2+...+(-1)^nC_n^nt^n\right]dt=$$

$$=\left[\frac{1}{m+1}C_n^0\alpha^nt^{m+1}-\frac{1}{m+2}C_n^1\alpha^{n-1}t^{m+2}+...+(-1)^n\frac{1}{m+n+1}C_n^nt^{m+n+1}\right]\Bigg|_0^{\alpha}=$$

$$=\alpha^{m+n+1}\left[\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2-...+(-1)^n\frac{C_n^n}{m+n+1}\right] \quad (1)$$

Calculăm $I_{m,n}$ utilizând integrarea prin părți şi notând $(x-a)^m=u$ şi $(b-x)^ndx=dv$, rezultă: $du=m(x-a)^{m-1}dx$ şi $v=-\frac{1}{n+1}(b-x)^{n+1}$.

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n+1}(x-a)^m (b-x)^{n+1}\Big|_a^b + \frac{m}{n+1}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}dx = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}.$$

Astfel: $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$

$$I_{m-1,n+1} = \frac{m-1}{n+2} I_{m-2,n+2}$$

....

$$I_{1,m+n-1} = \frac{1}{m+n} I_{0,n+m}$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități şi simplificând rezultă:

$$I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n)!} I_{0,m+n} = \frac{-m!n!}{(m+n)!}\frac{1}{m+n+1}(b-x)^{m+n+1}\Big|_a^b = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1} =$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1} = \frac{1}{m+n+1} C_{m+n}^{n} \alpha^{m+n+1} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă identitatea din enunț.

<u>Aplicația 3.</u> Să se demonstreze identitatea:

$$C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + ... + (-1)^n \frac{C_n^n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Soluție: Fie:

$(1-x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^n \Rightarrow$

$\Rightarrow C_n^1 x - C_n^2 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^n = 1 - (1-x)^n \Big| :x$

$$C_n^1 - C_n^2 x + ... + (-1)^n C_n^n x^{n-1} = \frac{1-(1-x)^n}{x}$$

rezultă: $I = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \left[C_n^1 - C_n^2 x + ... + (-1)^{n-1} C_n^n x^{n-1}\right]dx =$

$$= \frac{C_n^1}{1}x\Big|_0^1 - \frac{C_n^2}{2}x^2\Big|_0^1 + ... + (-1)^{n-1}\frac{C_n^n}{n}x^n\Big|_0^1 = \frac{C_n^1}{1} - \frac{C_n^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{C_n^n}{n} \qquad (1)$$

Pe de altă parte, putem scrie:

$$\frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{[1-(1-x)]\left[1+(1-x)+(1-x)^2 + ... + (1-x)^{n-1}\right]}{x} =$$

$$= 1 + (1-x) + (1-x)^2 + ... + (1-x)^{n-1}$$

Rezultă: $I = \int_0^1 dx + \int_0^1 (1-x)dx + \int_0^1 (1-x)^2 dx + ... + \int_0^1 (1-x)^{n-1}dx = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \quad (2)$

Din (1) şi (2) rezultă identitatea din enunț.

Aplicația 4. Să se demonstreze identitatea:

$$\sqrt{\mathrm{tg}x}\cdot\sqrt[4]{\mathrm{tg}(2x)}\cdot\sqrt[8]{\mathrm{tg}(4x)}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^{n+1}]{\mathrm{tg}(2^n x)}=2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin(2^{n+1}x)}},\ n\in\mathbf{N};\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Soluție: Pentru $k\in\mathbf{N}$, avem:

$$\mathrm{ctg}2^k x-\mathrm{ctg}2^{k+1}x=\frac{\cos 2^k x}{\sin 2^k x}-\frac{\cos 2^{k+1}x}{\sin 2^{k+1}x}=\frac{\cos 2^k x\cdot\sin 2^{k+1}x-\cos 2^{k+1}x\cdot\sin 2^k x}{\sin 2^{k+1}x\cdot\sin 2^k x}=$$

$$=\frac{\sin\left(2^{k+1}x-2^k x\right)}{\sin 2^k x\cdot\sin 2^{k+1}x}=\frac{\sin 2^k x}{\sin 2^k x\cdot\sin 2^{k+1}x}=\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}$$

Făcând k=0,1,...,n−1 rezultă:

$$\frac{1}{\sin 2x}=\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}2x$$

$$\frac{1}{\sin 4x}=\mathrm{ctg}2x-\mathrm{ctg}4x$$

. . . . .

$$\frac{1}{\sin 2^n x}=\mathrm{ctg}2^{\mathrm{n-1}}x-\mathrm{ctg}2^n x$$

Adunând membru cu mebru, rezultă:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}2^{\mathrm{n}}x \qquad (1)$$

Dacă $\alpha\in\mathbf{R}$ se ştie că:

$$\int\mathrm{ctg}(\alpha x)dx=\frac{1}{\alpha}\ln|\sin(\alpha x)|+C \quad \text{şi}$$

$$\int\frac{1}{\sin(\alpha x)}dx=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{\alpha x}{2}\right|^{\frac{1}{\alpha}}+C,\quad (C\in\mathrm{R})$$

Fie $a,b\in\mathbf{R}$; $a<b$. Din (1) rezultă:

$$\int_a^b\frac{dx}{\sin 2x}+\int_a^b\frac{dx}{\sin 4x}+\ldots+\int_a^b\frac{dx}{\sin 2^n x}=\int_a^b\mathrm{ctg}x\,dx-\int_a^b\mathrm{ctg}(2^n x)dx \qquad (2)$$

Dar, $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sin(2^k x)}=\ln\left|\mathrm{tg}(2^{k-1}x)\right|^{\frac{1}{2^k}}\Bigg|_a^b=\ln\sqrt[2^k]{\left|\frac{\mathrm{tg}(2^{\mathrm{k-1}}b)}{\mathrm{tg}(2^{\mathrm{k-1}}a)}\right|}$, k=1,2,...,n−1

$$\int_a^b\mathrm{ctg}x\,dx=\ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right| \text{ si } \int_a^b\mathrm{ctg}(2^n x)dx=\ln\sqrt[2^n]{\left|\frac{\sin(2^n b)}{\sin\left(2^n a\right)}\right|}.$$

Astfel relația (2) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln \sqrt[2^k]{\left|\frac{\operatorname{tg}(2^{k-1}b)}{\operatorname{tg}(2^{k-1}a)}\right|} = \ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right| - \ln\left|\sqrt[2^k]{\frac{\sin(2^n b)}{\sin(2^n a)}}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[\prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{\left|\frac{\operatorname{tg}(2^{k-1}b)}{\operatorname{tg}(2^{k-1}a)}\right|}\right] = \ln\left|\frac{\sin b}{\sin a}\right| - \ln\left|\sqrt[2^n]{\frac{\sin(2^n a)}{\sin(2^n b)}}\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{\left|\frac{\operatorname{tg}(2^{k-1}b)}{\operatorname{tg}(2^{k-1}a)}\right|} = \left|\frac{\sin b}{\sin a}\right| \cdot \left|\sqrt[2^n]{\frac{\sin(2^n a)}{\sin(2^n b)}}\right| \qquad (3)$$

În relația (3) facem $b=x$ şi $a=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ şi rezultă:

$$\sqrt{\operatorname{tg}x} \cdot \sqrt[4]{\operatorname{tg}(2x)} \cdot \sqrt[8]{\operatorname{tg}(4x)} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^{n+1}]{\operatorname{tg}(2^n x)} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt[2^{n+1}]{\sin(2^{n+1}x)}}.$$

Digitally signed by Virgil-Mihail Zaharia