1. Se consideră determinantul $d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ sunt soluțiile ecuației $x^3-2x=0$.

a) Să se calculeze $x_1+x_2+x_3$.

b) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

c) Să se calculeze valoarea determinantului d.

R. a) Ecuația se poate scrie $x^3+0\cdot x^2-2x+0=0$ şi din relațiile lui Viète se obține $x_1+x_2+x_3=0$.

b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}_{=-2}\right)=0-2\cdot(-2)=4$

c) Aplicăm proprietățile determinanților şi se obține:

$$d=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{adunăm} \\ \text{coloanele} \\ \text{la o coloană}}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_1+x_2+x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1+x_2+x_3 \\ x_3 & x_1 & x_1+x_2+x_3 \end{vmatrix} \overset{\text{punctul a)}}{=} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ x_2 & x_3 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{o coloană} \\ \text{cu termeni} \\ \text{nuli}}}{=} 0 .$$

2. Se consideră polinoamele cu coeficienți reali $f=X^4+aX^3-28X^2+bX+96$, $g=X^2+2X-24$ şi $h=(X^2+2X-24)(X^2-4)$.

a) Să se scrie forma algebrică a polinomului h .

b) Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$ astfel încât polinoamele f şi h să fie egale.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x+2\cdot 8^x-28\cdot 4^x-8\cdot 2^x+96=0$.

R. a) $h=X^4-4X^2+2X^3-8X-24X^2+96=X^4+2X^3-28X^2-8X+96$.

b) $f=h$ dacă au acelaşi grad şi coeficienții termenilor de acelaşi grad sunt egali $\Rightarrow$ $a=2$ şi $b=-8$.

c) Ecuația se poate scrie: $\left(2^x\right)^4+2\cdot\left(2^x\right)^3-28\cdot\left(2^x\right)^2-8\cdot 2^x+96=0$. Cu notația $2^x=y$, obținem:

$y^4+2y^3-28y^2-8y+96=0$.Ținând cont de **a)** ecuația devine: $\left(y^2+2y-24\right)\left(y^2-4\right)=0\Rightarrow$

$$\begin{cases} y^2+2y-24=0\Rightarrow\Delta=4+96=100,\ \sqrt{\Delta}=10,\ y_{1,2}=\dfrac{-2\pm 10}{2},\ y_1=-6,\ y_2=4 \\ y^2-4=0\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y_{3,4}=\pm 2 \end{cases}.$$

Aflăm necunoscutele, revenind la notație: $2^x=4 \Rightarrow x_1=2$, $2^x=-6$ nu are soluție, $2^x=2 \Rightarrow x_2=1$, $2^x=-2$ nu are soluție. Atunci $S=\{2, 1\}$.

3. Fie polinoamele $f=X^3+aX^2+X+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{3}$ din inelul $\mathbf{Z}_5[X]$.

a) Să se determine $a\in\mathbf{Z}_5$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a=\hat{1}$, să se arate că $f=(X+\hat{1})(X^2+\hat{1})$.

c) Pentru $a=\hat{1}$, să se rezolve în inelul $(\mathbf{Z}_5,+,\cdot)$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

R. $g=X+\hat{3}=X-\left(-\hat{3}\right)$ şi $-\hat{3}=\hat{2}$, atunci g/f dacă $f\left(\hat{2}\right)=\hat{0}$.

$f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}^3+a\cdot\hat{2}^2+\hat{2}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4}a+\hat{3}=\hat{4}a+\hat{1}\Rightarrow\ \hat{4}a+\hat{1}=0\Big|+\hat{4}\quad\Rightarrow\hat{4}a=\hat{4}\Rightarrow a=\hat{1}$.

b) Pentru $a=\hat{1}$ avem $f=X^3+X^2+X+\hat{1}$. Calculăm $\left(X+\hat{1}\right)\left(X^2+\hat{1}\right)=X^3+X^2+X+\hat{1}=f$.

c) $f(x)=\hat{0}\ \Rightarrow\ (x+\hat{1})(x^2+\hat{1})=\hat{0}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+\hat{1}=\hat{0}\text{ sau}\Rightarrow x_1=\hat{4}\\ x^2+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow x^2=\hat{4}\Rightarrow x_2=\hat{2},\ x_3=\hat{3}\end{cases}$.

4. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbf{Z}_5[X]$, $f=\left(\hat{3}a+\hat{3}b\right)X^2+\hat{2}X+\hat{2}a+\hat{3}b$ şi $g=\hat{2}X^2+\hat{2}X+\hat{3}a+\hat{2}b$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbf{Z}_5$, astfel încât cele două polinoame să fie egale.

b) Pentru $a=b=\hat{2}$, să se calculeze în $\mathbf{Z}_5$ suma $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})+f(\hat{3})+f(\hat{4})$.

c) Pentru $a=b=\hat{2}$, să se rezolve în $\mathbf{Z}_5$ ecuația $f(x)=\hat{0}$.

R. f=g dacă $\begin{cases}\hat{3}a+\hat{3}b=\hat{2}\\ \hat{2}a+\hat{3}b=\hat{3}a+\hat{2}b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{3}a+\hat{3}b=\hat{2}\\ \hat{4}a+\hat{1}b=\hat{0}\Big|\cdot\hat{2}\end{cases}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}\hat{3}a+\hat{3}b=\hat{2}\\ \hat{3}a+\hat{2}b=\hat{0}\end{cases}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}a=\hat{2}\\ \hat{1}+\hat{2}b=\hat{0}\Big|+\hat{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\hat{2}\\ \hat{2}b=\hat{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\hat{2}\\ b=\hat{2}\end{cases}$

b) Pentru $a=b=\hat{2}$ se obține $f=\hat{2}X^2+\hat{2}X$ $(\hat{2}a+\hat{3}b=\hat{2}\cdot\hat{2}+\hat{3}\cdot\hat{2}=\hat{4}+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow$

$$\begin{cases}f\left(\hat{0}\right)=\hat{0}\\ f\left(\hat{1}\right)=\hat{2}\cdot\hat{1}+\hat{2}\cdot\hat{1}=\hat{4}\\ f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}\cdot\hat{2}+\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{4}+\hat{4}=\hat{3}\\ f\left(\hat{3}\right)=\hat{2}\cdot\hat{3}+\hat{2}\cdot\hat{3}=\hat{1}+\hat{1}=\hat{2}\\ f\left(\hat{4}\right)=\hat{2}\cdot\hat{4}+\hat{2}\cdot\hat{4}=\hat{3}+\hat{3}=\hat{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)+f\left(\hat{3}\right)+f\left(\hat{4}\right)=\\ =\hat{0}+\hat{4}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}\end{array}$$

c) Pentru $a=b=\hat{2}$ se obține $f=\hat{2}X^2+\hat{2}X\Rightarrow\ \hat{2}x^2+\hat{2}x=\hat{0}\Rightarrow\hat{2}x\left(x+\hat{1}\right)=\hat{0}$

$x_1=\hat{0}$ sau $x+\hat{1}=\hat{0}\Rightarrow x_2=\hat{4}$.

5. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbf{R}[X]$, $f=(X-1)^{10}+(X-2)^{10}$ şi $g=X^2-3X+2$.

a) Să se descompună polinomul g în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu este divizibil cu polinomul g.

c) Să se determine restul împărțirii polinomului f la polinomul g.

R. a) Se poate descompune după formula de descompunere a trinomului de gradul II: $aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$.

$x^2-3x+2=0\Rightarrow\Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1,\ \sqrt{\Delta}=1, x_1=1,\ x_2=2$ şi $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$.

b) Din punctul **a)** $\Rightarrow$ $g=(X-1)(X-2)$ şi $g\,/\,f$ dacă $(X-1)\,/\,f$ şi $(X-2)\,/\,f$.
Calculăm $f(1)=(1-1)^{10}+(1-2)^{10}=(-1)^{10}=1\neq0\Rightarrow(X-1)$ nu divide f şi atunci g nu divide f.

c) Din teorema împărțirii polinoamelor avem: $f=g\cdot q+r$, unde grad r < grad $g\Rightarrow$ grad $r=1$, $r=aX+b$.
Pentru $x=1\Rightarrow f(1)=g(1)\cdot q(1)+a+b$, dar $g(1)=0$ şi $f(1)=1\Rightarrow\ a+b=1$

Pentru x=2⇒ $f(2)=g(2)\cdot q(2)+2a+b$, dar $g(2)$=0 şi $f(2)$=1⇒ $2a+b=1$

$\begin{cases}a+b=1\\2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow$ restul împărţirii împărţirii polinomului f la polinomul g, r=1.

6. Se consideră polinomul $f = X^4 + mX^2 + n$, unde $m,n\in\mathbf{R}$. Rădăcinile polinomului sunt x_1, x_2, x_3, x_4 .

a) Să se determine $m, n\in\mathbf{R}$ ştiind că polinomul f admite rădăcinile $x_1 = 0$ şi $x_2 =1$.

b) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât rădăcinile polinomului să verifice relaţia $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2$.

c) Pentru $m = 1$ şi $n =1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

R. a) $x_1 = 0$ rădăcină ⇒ $f(0)$=0 şi $x_2 =1$ rădăcină ⇒ $f(1)$=0. Atunci $f(0)=n\Rightarrow n=0$ şi $f(1)=1+m+n\Rightarrow 1+m=0\Rightarrow m=-1$.

b) Din relaţiile lui Viète, avem: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=m\\x_1x_2x_3x_4=-n\end{cases}$. Pornind de la prima relaţie, obţinem

$x_1+x_2+x_3+x_4=0|(\ )^2\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0\Rightarrow$.

$\Rightarrow 2+2m=0\Rightarrow m=-1$

c) Pentru $m = 1$ şi $n =1$ ⇒ $f = X^4 + X^2 + 1=X^4+2X^2+1-X^2=$

$=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$, produs de trinoame de gradul II care nu au rădăcini reale.

7. Se consideră polinoamele cu coeficienţi raţionali $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ şi $g = X^3 + X - 2$.

a) Să se determine $a,b\in\mathbf{Q}$, astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul g.

b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{Q}[X]$.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6\cdot 3^{-x} = 0$.

R. a) g / f dacă restul împărţirii lui f la g este polinomul nul.

$$\begin{array}{l}
(X^4+aX^3+bX^2-5X+6):(X^3+X-2)=X+a\\
\underline{-X^4\qquad\qquad -X^2+2X}\\
/\quad +aX^3+(b-1)X^2-3X+6\\
\quad\ \underline{-aX^3\qquad\qquad -aX+2a}\\
\quad\ /\ (b-1)X^2-(a+3)X+2a+6=r
\end{array}$$

Din $r\equiv 0\Rightarrow\begin{cases}b-1=0\Rightarrow b=1\\a+3=0\Rightarrow a=-3\\2a+6=0\Rightarrow a=-3\end{cases}$.

b) Pentru $a = -3$ şi $b = 1$ g/f şi atunci $f=(X^3+X-2)(X-3)$. Descompunem $g=X^3-1+X-1=(X-1)(X^2+X+1)+X-1=(X-1)(X^2+X+2)$ şi atunci

$f=\left(X^3+X-2\right)(X-3)=(X-1)(X-3)\left(X^2+X+2\right)$.

c) Ecuația se poate scrie:

$\left(3^x\right)^3-3\cdot\left(3^x\right)^2+3^x-5+\frac{6}{3^x}=0\Big|\cdot 3^x\Rightarrow\left(3^x\right)^4-3\cdot\left(3^x\right)^3+\left(3^x\right)^2-5\cdot 3^x+6=0$. Notăm $3^x=y\Rightarrow$

$y^4-3y^3+y^2-5y+6=0\Leftrightarrow(y-1)(y-3)\left(y^2+y+2\right)=0$ cu soluțiile $y_1=1,\ y_2=3$. Revenim la notație şi se obține: $3^x=1\Rightarrow x_1=0$ şi $3^x=3\Rightarrow x_2=1$.

8. Se consideră polinomul $f=X^3-9X^2-X+9$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la X^2-1.

b) Să se verifice că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=9\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-18$.

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(3^x)=0$.

R. a) Se efectuează împărțirea:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -9X^2 & -X & +9 & X^2-1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & & +X & & X-9 \\
\hline
/ & -9X^2 & / & +9 & \\
 & +9X^2 & & -9 & \\
\hline
 & / & & / &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{l} q=X-9 \\ r=0 \end{array}.
$$

b) Din relațiile lui Viète $\Rightarrow$ $x_1+x_2+x_3=9$

$$
\left.\begin{array}{l}
x_1 \text{ rădăcină } \Rightarrow f(x_1)=0\Rightarrow x_1^3-9x_1^2-x_1+9=0 \\
x_2 \text{ rădăcină } \Rightarrow f(x_2)=0\Rightarrow x_2^3-9x_2^2-x_2+9=0 \\
x_2 \text{ rădăcină } \Rightarrow f(x_2)=0\Rightarrow x_3^3-9x_3^2-x_3+9=0
\end{array}\right|(+)
$$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-9\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-(x_1+x_2+x_3)+27=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3-9\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-9+27=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=9\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-18$

c) Ecuația va fi: $\left(3^x\right)^3-9\cdot\left(3^x\right)^2-3^x+9=0$, notăm $3^x=y$ şi ecuația devine

$y^3-9y^2-y+9=0$.

Din punctul **a)** $f=\left(X^2-1\right)(X-9)$ cu rădăcinile x_1=1, x_2= -1 şi x_3=9. Ecuația în y are aceleaşi soluții ca şi rădăcinile polinomului f. Determinăm soluțiile ecuației:

$3^x=1\Rightarrow x_1=0$, $3^x=-1$, nu are soluție, $3^x=9\Rightarrow x_2=2$.

9. Se consideră polinomul cu coeficienți raționali $f=X^3+aX^2-5X+14$ şi suma $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

a) Să se determine numărul rațional a astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=-2$.

b) Pentru $a = -4$ să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.

c) Pentru $a = -4$ să se demonstreze egalitatea $S_3 + 42 = 4S_2 + 5S_1$.

R. a) Din $x_1 = -2$ rădăcina $\Rightarrow f(-2)=0 \Rightarrow -8+4a+10+14=0 \Rightarrow 4a=-16 \Rightarrow a=-4$.

b) Pentru $a = -4 \Rightarrow f = X^3 - 4X^2 - 5X + 14 \Rightarrow x^3-4x^2-5x+14=0$. Căutăm o soluție printre divizorii termenului liber, $D_{14}=\{\pm1, \pm2, \pm7, \pm14\}$. Se observă uşor că $f(-2)= - 8 - 16 +10+14=0$ şi $x_1= -2$ este soluție. Împărțim la X+2:

$$\left(X^3-4X^2-5X+14\right):(X+2)=X^2-6X+7$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-X^3-2X^2} \\
\;/\quad -6X^2-5X \\
\qquad \underline{+6X^2+12X} \\
\qquad\;\; /\quad +7X+14 \\
\qquad\qquad \underline{-7X-14} \\
\qquad\qquad\; /\quad /
\end{array}
\qquad \Rightarrow f=(X+2)\left(X^2-6X+7\right)$$

Ecuația va fi: $(x+2)\left(x^2-6x+7\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x_1=-2 \\ x^2-6x+7=0, \Delta=36-28=8, \sqrt{\Delta}=2\sqrt{2} \\ \qquad x_2=3-\sqrt{2},\ x_3=3+\sqrt{2} \end{cases}$.

c)

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 \text{ rădăcină } \Rightarrow f(x_1)=0 \Rightarrow X_1^3-4X_1^2-5X_1+14=0 \\
x_2 \text{ rădăcină } \Rightarrow f(x_2)=0 \Rightarrow X_2^3-4X_2^2-5X_2+14=0 \\
\underline{x_2 \text{ rădăcină } \Rightarrow f(x_2)=0 \Rightarrow X_3^3-4X_3^2-5X_3+14=0}
\end{array}\right| (+)$$

$$X_1^3+X_2^3+X_3^3-4\left(X_1^2+X_2^2+X_3^2\right)-5\left(X_1+X_2+X_3\right)+42=0 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow S_3-4S_2-5S_1+42=0 \Rightarrow S_3+42=4S_2+5S_1$$

10. În mulțimea $\mathbf{R}[X]$ se consideră polinoamele $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 - X - 1$.

a) Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului f la polinomul g .

b) Să se arate că dacă y este rădăcină a polinomului g, atunci $y^3 = 2y + 1$.

c) Să se demonstreze că dacă y este rădăcină a polinomului g , atunci $f(y)$ nu este număr rațional.

R. a)

$$\left(X^4+X^3+X^2+X+1\right):\left(X^2-X-1\right)=X^2+2X+4$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-X^4+X^3+X^2} \\
\;/\quad 2X^3+2X^2+X \\
\quad\; \underline{-2X^3+2X^2+X} \\
\qquad /\quad 4X^2+2X+1 \\
\qquad\quad \underline{-4X^2+4X+4} \\
\qquad\qquad\quad 6X+5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
q=X^2+2X+4 \\ \\ r=6X+5
\end{array}$$

b) Din y rădăcină $\Rightarrow$ $y^2 - y - 1 = 0 \Big|\cdot \underset{y\neq 0}{y} \Rightarrow y^3 - y^2 - y = 0 \Rightarrow y^3 = y^2 + y \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 = \underbrace{y^2 - y - 1}_{=0} + 2y + 1 = 2y + 1$.

c) Aflăm rădăcinile polinomului g: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 + 4\cdot 1\cdot(-1) = 5$,

$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_{1,2} \notin \mathrm{Q}$. Calculăm $f(y) = y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$. Din punctul **a)**

avem: $f(y) = \underbrace{\left(\underbrace{y^2 - y - 1}_{=0}\right)\left(y^2 + 2y + 4\right)}_{=0} + 6y + 5 = 6y + 5$, dar $y \notin \mathbf{Q}$ şi atunci $6y + 5 \notin \mathbf{Q}$ $\Rightarrow$

$f(y) \notin \mathbf{Q}$.

11. Se consideră polinoamele şi $f = \hat{3}X^5 + \hat{3}X^3 + \hat{3}X + \hat{4} \in \mathbf{Z}_5[X]$

$g = \hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3} \in \mathbf{Z}_5[X]$.

a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Să se rezolve în mulţimea $\mathbf{Z}_5$ ecuaţia $f(x) = \hat{0}$.

c) Să se determine câtul împărţirii polinomului f la polinomul g.

R. a) $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{4} + \underbrace{\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}+\hat{4}}_{f(\hat{1})=\hat{3}} = \hat{4} + \hat{3} = \hat{2}$.

b) $f(x) = \hat{0} \Rightarrow \hat{3}x^5 + \hat{3}x^3 + \hat{3}x + \hat{4} = \hat{0}$. Pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei verificăm pe rând toate valorile. $f(\hat{0}) = \hat{4}$, $f(\hat{1}) = \hat{3}$, $f(\hat{2}) = \hat{3}\cdot\hat{2}^5 + \hat{3}\cdot\hat{2}^3 + \hat{3}\cdot\hat{2} + \hat{4} = \hat{1} + \hat{4} + \hat{1} + \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow x_1 = \hat{2}$,

$f(\hat{3}) = \hat{3}\cdot\hat{3}^5 + \hat{3}\cdot\hat{3}^3 + \hat{3}\cdot\hat{3} + \hat{4} = \hat{4} + \hat{1} + \hat{4} + \hat{4} = \hat{3} \neq \hat{0}$,

$f(\hat{4}) = \hat{3}\cdot\hat{4}^5 + \hat{3}\cdot\hat{4}^3 + \hat{3}\cdot\hat{4} + \hat{4} = \hat{2} + \hat{2} + \hat{2} + \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow x_2 = \hat{4} \Rightarrow S = \{\hat{2}, \hat{4}\}$

c) $q = X^2 + \hat{4}X + \hat{3}$ şi $r = \hat{0}$

$$
\begin{array}{l}
\left(\hat{3}X^5 + \quad \hat{3}X^3 + \quad \hat{3}X + \hat{4}\right) : \left(\hat{3}X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X + \hat{3}\right) = X^2 + \hat{4}X + \hat{3} \\
\underline{\hat{2}X^5 + \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2} \\
/ \quad \hat{2}X^4 + \hat{1}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X \\
\quad\quad \underline{\hat{3}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{3}X} \\
\quad\quad / \quad \hat{4}X^3 + \hat{4}X^2 + X + \hat{4} \\
\quad\quad\quad\quad \underline{\hat{1}X^3 + \hat{1}X^2 + \hat{4}X + \hat{1}} \\
\quad\quad\quad\quad / \quad / \quad / \quad /
\end{array}
$$

12. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 11X^2 + 7X + m$, $f \in \mathbf{R}[X]$.

a) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Să se determine $m \in \mathbf{Q}$ astfel încât $f(\sqrt{2}) \in \mathbf{Q}$.

c) Pentru $m = -9$ să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.

R. a) $X - 1 / f \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow m + 11 + 7 + m = 0 \Rightarrow 2m = -18 \Rightarrow m = -9$.

b) $f\left(\sqrt{2}\right)=m\left(\sqrt{2}\right)^3+11\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+7\sqrt{2}+m=2m\sqrt{2}+22+7\sqrt{2}+m=22+m+\sqrt{2}\left(2m+7\right)$ şi

$f\left(\sqrt{2}\right)\in\mathbf{Q}$ dacă $2m+7=0\Rightarrow m=-\frac{7}{2}$.

c) Pentru $m=-9 \Rightarrow f=-9X^3+11X^2+7X-9$.

În relaţiile lui Viète, luăm prima relaţie şi ridicăm la pătrat:

$x_1+x_2+x_3=\frac{11}{9}\Big|(\ )^2 \Rightarrow \left(x_1+x_2+x_3\right)^2=\frac{121}{81}\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)=\frac{121}{81}$

$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-\frac{7}{9}$

$x_1x_2x_2=-1$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=\frac{121}{81}$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{121}{81}+\frac{14}{9}=\frac{121+126}{81}=\frac{247}{81}$.

13. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+(a+3)X^2+6X-4$ care are coeficienţii reali şi rădăcinile lui $x_1, x_2, x_3, x_4\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine $a\in$R astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_3=3$.

b) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât polinomul să fie divizibil cu $X-\sqrt{2}$.

c) Pentru $a=-3$ să se descompună polinomul f în produs de factori ireductibili în $\mathbf{R}[X]$.

R. a) Din relaţiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3+x_4=-a \Rightarrow a=-3$.

b) $X-\sqrt{2}\,/\,f \Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=0\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^4+a\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(a+3\right)\left(\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{2}-4=0\Rightarrow$

$4+2a\sqrt{2}+2\left(a+3\right)+6\sqrt{2}-4=0\Rightarrow 2a\left(\sqrt{2}+1\right)=-6\left(\sqrt{2}+1\right)\Rightarrow a=-3$.

c) Din $X-\sqrt{2}\,/\,f \Rightarrow \sqrt{2}$ rădăcină a lui f, polinom cu coeficienţi reali $\Rightarrow -\sqrt{2}$ rădăcină $\Rightarrow X+\sqrt{2}\,/\,f \Rightarrow \left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)/\,f\Rightarrow\left(X^2-2\right)/\,f$. Efectăm împărţirea:

$$
\begin{array}{l}
\left(X^4-3X^3 \qquad + 6X - 4\right):\left(X^2-2\right)=X^2-3X+2 \\
\underline{-X^4 \qquad +2X^2} \\
\ /\ \ -3X^3+2X^2+6X \\
\ \ \underline{+3X^3 \qquad -6X} \\
\ \ \ \ /\ \ +2X^2\ \ /\ \ -4 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{-2X^2 \qquad +4} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ /\qquad\quad /
\end{array}
$$

$x^2-3x+2=0$

$\Delta=9-8=1\Rightarrow\sqrt{\Delta}=1$.

$x_1=1,\ x_2=2$

Se obţine $f=\left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-1\right)\left(X-2\right)$.

14. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+1)X^2-3X+3$, $f\in\mathbf{Q}[X]$.

a) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât suma rădăcinilor polinomului f să fie egală cu 1.

b) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să admită rădăcina $x_1=\sqrt{3}$.

c) Pentru $m=0$ să se descompună polinomul f în factori ireductibili în $\mathbf{Q}[X]$.

R. a) Din relaţiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=m+1\Rightarrow m+1=1\Rightarrow m=0$.

b) $x_1 = \sqrt{3}$ rădăcină $\Rightarrow f(\sqrt{3})=0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^3 - (m+1)\left(\sqrt{3}\right)^2 - 3\sqrt{3} + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\sqrt{3} - 3(m+1) - 3\sqrt{3} + 3 = 0 \Rightarrow 3m = 0 \Rightarrow m = 0$.

c) Pentru $m = 0 \Rightarrow f = X^3 - X^2 - 3X + 3 = X^2(X-1) - 3(X-1) =$

$= (X-1)\left(X^2 - 3\right) = (X-1)\left(X - \sqrt{3}\right)\left(X + \sqrt{3}\right)$.

15. Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 - aX - 4, f \in \mathbf{R}[X]$.

a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile reale ale
polinomului f.

b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât polinomul f să fie divizibil cu polinomul $X^2 - 2$.

c) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care polinomul f are o rădăcină rațională pozitivă.

R. a) Din relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = -a \Rightarrow a = 2$.

b) $X^2 - 2 \,/\, f \Rightarrow$ restul împărțirii este polinomul nul. Efectăm împărțirea:

$$\left(X^3 + aX^2 - aX - 4\right) : \left(X^2 - 2\right) = X + a$$

$$\begin{array}{lll} \underline{-X^3 \qquad\qquad +2X} & & \\ / \quad aX^2 + (2-a)X - 4 & & \\ \quad \underline{-aX^2 \qquad\qquad +2a} & & \\ \quad / \quad (2-a)X + 2a - 4 & & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} r = (2-a)X + 2a - 4 \\ r \equiv 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} 2 - a = 0 \\ 2a - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2.$$

c) Rădăcinile raționale sunt de forma $\alpha = \frac{p}{q}$, unde $p \,/\, 4$ şi $q \,/\, 1 \Rightarrow$ rădăcina este de

forma $p \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Verificăm pe rând:

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 + a - a - 4 = -3 \neq 0$,

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = -1 + a + a - 4 = 2a - 5$ şi $2a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2} \notin \mathbf{Z}$,

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 8 + 4a - 2a - 4 = 2a + 4$ şi $2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$,

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 4a + 2a - 4 = 6a - 12$ şi $6a - 12 = 0 \Rightarrow a = 2$,

$x = 4 \Rightarrow f(4) = 64 + 16a - 4a - 4 = 12a - 60$ şi $12a - 60 = 0 \Rightarrow a = 5$,

$x = -4 \Rightarrow f(-4) = -64 + 16a + 4a - 4 = 20a - 68$ şi $20a - 68 = 0 \Rightarrow a = \frac{68}{20} \notin \mathbf{Z}$.

Valorile lui a sunt -2, 2 şi 5.

16. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 - X - 1$, unde $a \in \mathbf{Z}$.

a) Să se determine a ştiind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Pentru $a = 1$ să se determine rădăcinile reale ale polinomului f.

c) Să se demonstreze că $f(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$.

R. a) $x = 1$ este rădăcină a polinomului $f \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a - 1 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$.

b) Pentru $a = 1$, $f = X^4 + X^3 - X - 1 = X^3(X + 1) - (X + 1) = (X + 1)(X^3 - 1) =$
$= (X + 1)(X - 1)(X^2 + X + 1)$, atunci $x + 1 = 0$, $x_1 = -1$; $x - 1 = 0$, $x_2 = 1$; $x^2 + x + 1 = 0$ nu are soluții reale. Rădăcinile reale sunt ±1.

c) Din $x\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z} \Rightarrow x=\frac{m}{n};\ m,n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0,\ (m,n)=1$. Rădăcinile reale ale polinomului f sunt ±1, atunci $f(x)\neq 0$ pentru orice $x\neq\pm1$, inclusiv $x=\frac{m}{n}$.

17. Se consideră polinoamele $f, g\in\mathbf{Z}_2[X]$, $f=X^2+\hat{1}$ şi $g=X+\hat{1}$ şi mulţimea $H=\left\{a+bX+cX^2 \middle| a,b,c\in\mathbf{Z}_2\right\}$.

a) Să se verifice că $g^2=f$.

b) Să se determine câtul şi restul împărţirii polinomului $f+g$ la polinomul f.

c) Să se determine numărul elementelor mulţimii H.

R. a) $g^2=\left(X+\hat{1}\right)\cdot\left(X+\hat{1}\right)=X^2\underbrace{+X+X}_{=\hat{0}\cdot X=\hat{0}}+\hat{1}=X^2+\hat{1}=f$.

b) $f+g=X^2+\hat{1}+X+\hat{1}=f\cdot\hat{1}+X+\hat{1}\Rightarrow q=\hat{1}$ şi $r=X+\hat{1}$.

c) Coeficienţii a,b,c pot lua valorile $\hat{0}$ şi $\hat{1}\in\mathbf{Z}_2$ şi atunci numărul funcţiilor de la o mulţime cu trei elemente la o mulţime cu 2 elemente este: $2^3=8$. Mulţimea H are 8 elemente.

18. Se consideră inelul de polinoame $\mathbf{Z}_3[X]$.

a) Pentru $g\in\mathbf{Z}[X]$, $g=\left(X+\hat{2}\right)^2\left(X+\hat{1}\right)$, să se calculeze $g\left(\hat{0}\right)$.

b) Dacă $f\in\mathbf{Z}_3[X]$, $f=X^3+\hat{2}X$, să se arate că $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbf{Z}_3$.

c) Să se determine toate polinoamele $h\in\mathbf{Z}_3[X]$, care au gradul egal cu 3 şi pentru care $h(\hat{0})=h(\hat{1})=h(\hat{2})$.

R. a) $g\left(\hat{0}\right)=\left(\hat{0}+\hat{2}\right)^2\left(\hat{0}+\hat{1}\right)=\hat{2}^2\cdot\hat{1}=\hat{1}\cdot\hat{1}=\hat{1}$

b) $\mathbf{Z}_3=\left\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\right\}$ şi verificăm pentru fiecare valoare: $f\left(\hat{0}\right)=\hat{0}^3+\hat{2}\cdot\hat{0}=\hat{0}$,

$f\left(\hat{1}\right)=\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}=\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$, $f\left(\hat{2}\right)=\hat{2}^3+\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{2}+\hat{1}=\hat{0}$ şi atunci $f(x)=\hat{0}$, oricare ar fi $x\in\mathbf{Z}_3$.

c) Grad$h$=3 $\Rightarrow h=aX^3+bX^2+cX+d$, cu $a,b,c,d\in\mathbf{Z}_3$, $a\neq\hat{0}$ şi aplicăm condiţiile:
$h\left(\hat{0}\right)=d,\ h\left(\hat{1}\right)=a+b+c+d,\ h\left(\hat{2}\right)=a\cdot\hat{2}^3+b\cdot\hat{2}^2+c\cdot\hat{2}+d=\hat{2}a+b+\hat{2}c+d$, se obţine sistemul:

$$\begin{cases}a+b+c+d=d\\ \hat{2}a+b+\hat{2}c+d=d\\ \hat{2}a+b+\hat{2}c+d=a+b+c+d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=\hat{0}\\ \hat{2}a+b+\hat{2}c=\hat{0}\\ a+c=\hat{0}, d\in Z_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\hat{0}\\ a=-c\\ d\in Z_3\end{cases}.$$

Pentru $a=\hat{1}\Rightarrow c=\hat{2},d=\hat{0}\Rightarrow h=X^3+\hat{2}X$, $d=\hat{1}\Rightarrow h=X^3+\hat{2}X+\hat{1}$, $d=\hat{2}\Rightarrow h=X^3+\hat{2}X+\hat{2}$, pentru $a=\hat{2}\Rightarrow c=\hat{1},d=\hat{0}\Rightarrow h=\hat{2}X^3+X$, $d=\hat{1}\Rightarrow h=\hat{2}X^3+X+\hat{1}$, $d=\hat{2}\Rightarrow h=\hat{2}X^3+X+\hat{2}$

19. Se consideră polinomul $f=4X^4+4mX^3+(m^2+7)X^2+4mX+4$, unde $m\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ ştiind că $x=1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Să se determine $m\in\mathbf{R}$ ştiind că suma rădăcinilor polinomului f este egală cu 0.

c) Pentru $m=-5$ să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x)=0$.

R. a) $x=1$ este rădăcină a polinomului $f \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow 4+4m+m^2+7+4m+4=0$

$\Rightarrow m^2+8m+15=0 \Rightarrow \Delta=64-60=4, \sqrt{\Delta}=2$, $m_{1,2}=\frac{-8\pm 2}{2} \Rightarrow m_1=-5, m_2=-3$.

b) Rădăcinile polinomuli f sunt, x_1,x_2,x_3,x_4 şi $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{4m}{4}=-m$ şi

$-m=0 \Rightarrow m=0$.

c) Pentru $m=-5 \Rightarrow f=4X^4+4(-5)X^3+\left[(-5)^2+7\right]X^2+4(-5)X+4 \Rightarrow$

$f=4X^4-20X^3+32X^2-20X+4=4\left(X^4-5X^3+8X^2-5X+1\right) \Rightarrow$

$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$ ecuație reciprocă de gradul IV $\Rightarrow$

$x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0 \Big| : x^2 \Rightarrow x^2-5x+8-5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow$

$x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$. Notăm $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, se

obține $y^2-2-5y+8=0 \Rightarrow y^2-5y+6=0 \Rightarrow y_1=2, y_2=3$. Revenim la necunoscuta x

$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2 \Big| \cdot x \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=1$ şi

$x+\frac{1}{x}=3 \Big| \cdot x \Rightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow \Delta=9-4=5 \Rightarrow x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

20. Se consideră polinomul $f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2$, unde $a\in\mathbf{R}$.

a) Ştiind că $a=0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x)=0$.

b) Să se verifice că $f=(X^2-2X+1+a)(X^2-2X+1-a)$.

c) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

R. a) Dacă $a=0$, atunci ecuația $f(x)=0$ va fi

$\left(x^2-2x+1\right)^2=0 \Rightarrow x^2-2x+1 \Rightarrow (x-1)^2 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ rădăcină multiplă de ordinul IV.

b) Descompunem după diferența pătratelor:

$f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2=\left(X^2-2X+1+a\right)\left(X^2-2X+1-a\right)$.

c) $f(x)=0 \Rightarrow \left(x^2-2x+1+a\right)\left(x^2-2x+1-a\right)=0 \Rightarrow$

$x^2-2x+1+a=0$ sau $x^2-2x+1-a=0$ ecuațiile trebuie să aibă soluții reale,

$\Delta_1=4-4-4a=-4a\geq 0$ şi $\Delta_2=4-4+4a=4a\geq 0 \Rightarrow a=0$.

21. Se consideră ecuația $x^4-ax^3-ax+1=0$ cu soluțiile x_1,x_2,x_3,x_4, unde $a\in\mathbf{R}$.

a) Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.

b) Pentru $a=1$, să se determine soluțiile reale ale ecuației.

c) Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care ecuația admite cel puțin o soluție număr întreg.

R. a) Din relațiile lui Viete $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{-a}{1} = 5 \Rightarrow a = 5$.

b) Pentru $a = 1 \Rightarrow x^4 - x^3 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^3(x-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^3-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1$ rădăcină dublă reală.

c) Soluțiile întregi sunt printre divizorii termenului liber, adică ± 1. Pentru $x=1$, $a=1$, iar pentru $x=-1$, $a=-1$.