Cuprins

Memorator matematic clasele V-VIII

Algebra

Formule de calcul

Pătratul unei sume (diferenţe) de doi termeni

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Produsul sumei cu diferenţa aceloraşi termeni

$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Pătratul unei sume de trei termeni

$(a+b+c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Formule de descompunere în factori

Formula de scoatere a factorului comun

$ab + ac + ad + ... + az = a(b + c + d + ... + z)$

Formula de restrângere a pătratului unei sume (diferenţe) de doi termeni

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$,

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Formula de descompunere a diferenţei pătratelor

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Calculul mediilor

1. Media aritmetică (m_a)

   $$m_a = \frac{a+b}{2}$$

2. Media geometrică (proporţională) (m_g)

   $$m_g = \sqrt{a \cdot b}, a \geq 0, b \geq 0$$

3. Media armonică (m_h)

   $$m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}, a > 0, b > 0$$

<u>Inegalitatea mediilor</u>

Oricare ar fi numerele a>0, b>0, $a \geq b$, avem: $m_a \geq m_g \geq m_h$.

Divizibilitatea numerelor

- Un număr întreg se divide cu 2 dacă cifra unităţilor este pară.
- Un număr întreg se divide cu 3 (sau 9) dacă suma cifrelor sale se divide cu 3 (sau 9).
- Un număr se divide cu 4 (sau 8) dacă numărul format din ultimele sale două (trei) cifre este un număr divizibil cu 4 (respectiv 8).

- Un număr întreg se divide cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.
- Un număr întreg se divide cu 25 dacă ultimele sale două cifre sunt 00, 25, 50 sau 75.
  - ✓ Singurul număr prim par este 2.
  - ✓ Produsul a două numere întregi consecutive se divide cu 2.
  - ✓ Produsul a trei numere întregi consecutive se divide cu 6.
  - ✓ Produsul a patru numere întregi consecutive se divide cu 24.
  - ✓ Dacă un număr întreg *A* se termină în 0, 1, 5, 6, atunci numărul $A^n, n \in N^*$, se termină tot în 0, 1, 5, respectiv 6.

Fracţii

1. O fracţie de forma $\frac{m}{n}(n \neq 0)$ este ireductibilă dacă (*m*, *n*) = 1,(c.m.m.d.c=1)
2. O fracţie de forma $\frac{m}{n}(n \neq 0)$ reprezintă un număr întreg dacă $m \vdots n$.
3. O fracţie de forma $\frac{m}{n}(n \neq 0)$, (m, n) = 1, este număr zecimal finit dacă n are divizori 2^asi/sau 5^b sau combinaţii ale lor, număr zecimal periodic simplu dacă n are alţi divizori diferiţi de $2^a si 5^b$ şi număr zecimal periodic mixt dacă n are divizori şi 2^asi/sau 5^b şi alţi divizori primi.
4. O fracţie cu numitorul 100 se numeşte procent.

Rapoarte şi proporţii

- ✓ O expresie de forma $\frac{a}{b}$, unde a şi b sunt expresii (b$\neq$0) se numeşte raport.
- ✓ Raportul a două mărimi, măsurate cu aceeaşi unitate de măsură, este raportul numerelor prin care se exprimă cele două măsuri.
- ✓ Proporţia este o egalitate între două rapoarte.
- ✓ Proprietatea fundamentală a unei proporţii $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ este : $a \cdot d = b \cdot c$.
- ✓ Din proporţia $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se deduc următoarele proporţii derivate : $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (proporţii derivate cu aceeaşi termeni), $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}, \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{d}, etc.$(proporţii derivate cu alţi termeni).

Numere reale

1. Se poate arăta că un număr nu este un pătrat perfect demonstrând că este situat între pătrate perfecte consecutive.
2. Se poate arăta că un număr nu este întreg :
   - Fie demonstrând că este situat între numere întregi consecutive.
   - Fie demonstrând că fracţia care îl exprimă este ireductibilă şi are numitorul diferit de 1 şi -1.
3. Se poate arăta că un număr nu este raţional dacă scriindu-l sub forma $\frac{m}{n}, m, n \in Z, (m,n) = 1$ se ajunge la o contradicţie.

4. Se poate demonstra că un număr $\sqrt{a}, a \in N$, nu este raţional :
    - Fie arătând că *a* nu este pătrat perfect.
    - Fie arătând ca ultima cifră a numărului a aparţine mulţimii $\{2,3,7,8\}$.
    - Fie arătând că a se divide cu numărul *p* prim, dar nu se divide cu p^2.

Mulţimi

Moduri de definire a mulţimilor. Mulţimile se definesc fie prin indicarea elementelor lor (de pildã {0,1,3} sau {x,y,z}), fie prin specificarea unei proprietãţi caracteristice a elementelor lor (de exemplu $\{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$).

Mulţimile se noteazã cu litere mari: A, B, C,… X, Y, Z, iar elementele lor cu litere mici: a, b, c,…

Apartenenţa unui element la o mulţime. Dacã un element *a* aparţine unei mulţimi *A*, acesta se noteazã $a \in A$ şi se citeşte "*a* aparţine lui *A*".

Definiţie. ***Mulţimea vidã* este mulţimea care nu are nici un element. Se noteazã cu** $\varnothing$.

1. Egalitatea mulţimlor A şi B:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ şi } (\forall y \in B \Rightarrow y \in A)$$

Proprietãţile egalitãţii:

1. $\forall$ A, A = A (reflexivitatea);
2. (A = B) $\Rightarrow$ (B = A) (simetria);
3. (A = B $\wedge$ B = C) $\Rightarrow$ (A = C) (tranzitivitatea);

2. Incluziunea mulţimii A în mulţimea B:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Mulţimea A se numeşte *o parte* sau *o submulţime* a lui B.

Proprietãţile incluziunii:

1. $\forall$ A, A $\subset$ A (reflexivitatea);
2. (A $\subset$ B) $\wedge$ (B $\subset$ A) $\Rightarrow$ (A = B) (antisimetria);
3. (A $\subset$ B $\wedge$ B $\subset$ C) $\Rightarrow$ (A $\subset$ C) (tranzitivitatea);
4. $\forall$ A, $\varnothing \subset$ A

Relaţia de neincluziune se noteazã A $\not\subset$ B.

3. Reuniunea mulţimilor A şi B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Proprietãţile reuniunii:

1. $\forall$ A, B: A $\cup$ B = B $\cup$ A (reflexivitatea);
2. $\forall$ A, B, C: (A $\cup$ B) $\cup$ C) = A $\cup$ (B $\cup$ C) (asociativitatea);
3. $\forall$ A: A $\cup$ A = A (idempotenţa);
4. $\forall$ A: A $\cup$ $\varnothing$ = A;

5. $\forall$ A, B: $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

4. Intersecţia mulţimilor A şi B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Proprietãţile intersecţiei:

1. $\forall$ A, B: $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea);
2. $\forall$ A, B, C: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea);
3. $\forall$ A: $A \cap A = A$ (idempotenţa);
4. $\forall$ A: $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $\forall$ A, B: $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$
6. $\forall$ A, B, C: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivitatea intersecţiei faţã de reuniune);
7. $\forall$ A, B, C: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivitatea reuniunii faţã de intersecţie);
8. $\forall$ A, B: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ (absorbţia).

Definiţie. ***Mulţimile** A **şi** B **care nu au nici un element comun se numesc <u>disjuncte</u>. Pentru ele avem** $A \cap B = \varnothing$.*

5. Diferenţa mulţimilor A şi B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Proprietãţile diferenţei:

1. $\forall$ A: $A \setminus A = \varnothing$;
2. $\forall$ A, B, C: $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;
3. $\forall$ A, B: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
4. $\forall$ A, B: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;
5. $\forall$ A, B, C: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;
6. $\forall$ A, B, C: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
7. $\forall$ A, B, C: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
8. $\forall$ A, B, C: $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$.

Produsul cartezian a douã mulţimile A şi B:

$$A \text{ x } B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Proprietãţile produsului cartezian ($\forall$ A,B,C,D avem):

1. A x B $\neq$ B x A, dacã A $\neq$ B;
2. $(A \text{ x } B) \cup (A \text{ x } C) = A \text{ x } (B \cup C)$;
3. $(A \cup B) \text{ x } C = (A \text{ x } C) \cup (B \text{ x } C)$;
4. $(A \cap B) \text{ x } C = (A \text{ x } C) \cap (B \text{ x } C)$;
5. $(A \setminus B) \text{ x } C = A \text{ x } C \setminus B \text{ x } C$;
6. $(A \cap B) \text{ x } (C \cap D) = (A \text{ x } C) \cap (B \text{ x } D)$

Operaţii cu numere reale

Puteri naturale ale numerelor reale

1. $(+a)^n = +a^n$
2. $(-a)^{2n} = +a^{2n}$
3. $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
4. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
5. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$
6. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
7. $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$;
8. $\frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = a^{-m}$, $a \neq 0$;
9. $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$;
10. $a^0 = 1$, $a \neq 0$;
11. $0^n = 0$, $n \neq 0$, $n \in N$.

Radicali. Proprietãţi

1. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}, a > 0$;
2. $\sqrt[m]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = a^{-\frac{1}{m}}, a > 0$;
3. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a, a \geq 0$;
4. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}, a, b \geq 0$;
5. $\left(\sqrt[m]{\frac{1}{a}}\right)^m = \frac{1}{a}, a > 0$;
6. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}, a, b, c, \geq 0$;
7. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$;
8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a^{m+n}}, a \geq 0$;
9. $\sqrt[m]{a} : \sqrt[n]{a} = \sqrt[m+n]{a^{m-n}}, a > 0$;

Modulului unui numãr real

$$|x| = \begin{cases} -\text{x, daca x} < 0 \\ \text{0, daca x} = 0 \\ \text{x, daca x} > 0 \end{cases}$$

Proprietãţi: $\forall$ x,y$\in$R, avem:

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $|-x| = |x|$;

1. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ sau $x = -y$;
2. $|x| = a \Leftrightarrow -a = x = a, a \in$ R;
3. $-|x| \leq x \leq |x|$;
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$;
5. $|x-y| \leq |x| + |y|$
6. $||x| - |y|| \leq |x-y|$;
7. $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$;
8. $|xy| = |x| \cdot |y|$;
9. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$.

Ecuaţia de forma $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in R, a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ - discriminantul ecuaţiei

$\Delta < 0 \Rightarrow S = \phi$

$\Delta = 0 \Rightarrow S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

$\Delta > 0 \Rightarrow S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Geometrie

Pentru a dovedi că două segmente (drepte) sunt **paralele** este suficient să demonstrăm că :

- ✓ sunt baze într-un trapez,sau
- ✓ sunt laturi opuse într-un paralelogram, sau
- ✓ sunt paralele cu o a treia dreaptă, sau
- ✓ formează cu o secantă unghiuri alterne interne (externe) sau corespondente congruente, sau interne (externe) de aceeaşi parte a secantei suplementare.

Pentru a dovedi că într-un triunghi *ABC*, $MN \parallel BC$, $M \in (AB), N \in (AC)$ este suficient să arătăm că :

- ➢ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ sau celelalte derivate, sau
- ➢ $\Delta ABC \sim \Delta AMN$.

Pentru a dovedi că două **segmente sunt congruente** este suficient să demonstrăm că :

- ✓ sunt laturi opuse într-un paralelogram, sau
- ✓ sunt diagonale într-un dreptunghi sau trapez isoscel, sau
- ✓ sunt laturi corespunzătoare în triunghiuri congruente, sau
- ✓ în acelaşi triunghi se opun la unghiuri congruente, sau
- ✓ sunt înălţimi, sau bisectoare, sau mediane corespunzătoare vârfurilor de la baza unui triunghi isoscel, sau
- ✓ în cerc sunt coarde care subîntind unghiuri la centru (sau unghiuri cu vârful pe cerc) congruente, sau
- ✓ sunt laturi neparalele într-un trapez isoscel, sau
- ✓ sunt simetrice faţă de un punct sau o dreaptă.

Pentru a dovedi că două **unghiuri sunt congruente** este suficient să demonstrăm că :

- ➢ sunt unghiuri opuse într-un paralelogram, sau
- ➢ sunt unghiuri opuse la laturi congruente în acelaşi triunghi, sau
- ➢ sunt unghiuri corespunzătoare în triunghiuri asemenea, sau
- ➢ au acelaşi complement, sau acelaşi suplement, sau
- ➢ sunt unghiuri la centru sau cu vârful pe cerc şi subîntind coarde congruente (în acelaşi cerc sau în cercuri congruente), sau
- ➢ sunt unghiuri alterne interne (externe) sau corespondente formate de o secantă cu două drepte paralele.

Fie *ABC* un triunghi şi $D \in (BC)$.

Triunghiul *ABC* este **isoscel** (*AB* = *AC*) dacă :

- ✓ unghiurile *B* şi *C* sunt congruente, sau
- ✓ [*AD*] este înălţime şi mediană, sau
- ✓ [*AD*] este înălţime şi bisectoare, sau
- ✓ [*AD*] este bisectoare şi mediană, sau
- ✓ înălţimile, sau medianele, sau bisectoarele din *B* şi *C* sunt congruente.

Triunghiul *ABC* este **echilateral** dacă:

- ➢ are toate unghiurile congruente, sau
- ➢ este isoscel şi are un unghi de 60 , sau
- ➢ toate înălţimile sunt şi mediane, sau
- ➢ toate înălţimile sunt şi bisectoare, sau

- toate bisectoarele sunt şi mediane, sau
- are toate înălţimile congruente, sau
- are toate medianele congruente, sau
- are toate bisectoarele congruente.

Triunghiul *ABC* este **dreptunghic în** *A* dacă:

- laturile satisfac relaţia $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (R.T.P.)
- mediana *AM* este egală cu ½ din latura *BC*, sau
- $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 90^0$, sau
- dacă [*AD*] este înălţime şi avem una din relaţiile : $AB^2 = BD \cdot BC sau AC^2 = CD \cdot CB.$

Patrulaterul *ABCD* este **paralelogram** dacă:

- are laturile opuse paralele, sau
- are laturile opuse congruente, sau
- are două laturi opuse paralele şi congruente, sau
- are unghiurile opuse congruente, sau
- diagonalele se împart în părţi congruente.

Patrulaterul *ABCD* este **dreptunghi** dacă :

- este un paralelogram cu un unghi drept, sau
- este un paralelogram cu diagonalele congruente, sau
- are trei unghiuri drepte.

Patrulaterul *ABCD* este **romb** dacă :

- este paralelogram cu două laturi alăturate congruente, sau
- este un paralelogram cu diagonalele perpendiculare, sau
- este un paralelogram cu diagonalele incluse în bisectoarele unghiurilor.

Patrulaterul *ABCD* este **pătrat** dacă :

- este un dreptunghi cu două laturi alăturate congruente, sau
- este un dreptunghi cu diagonalele perpendiculare, sau
- este un romb cu un unghi drept.

Într-un plan există următoarele relaţii de poziţie :

- între puncte numai relaţii de distanţă (lungimi de segmente)
- între un punct şi o dreaptă numai relaţii de distanţă
- între două drepte relaţii de distanţă, când sunt paralele, sau relaţii caracterizate prin mărimea unghiului dintre ele

Segmentele, fiind porţiuni de dreaptă situate între puncte determinate, se vor compara între ele fie prin compararea lungimilor lor, fie prin compararea unghiurilor formate de dreptele suport. Lungimea unui segment se măsoară fie utilizând instrumente de măsură adecvate, fie se compară cu lungimea altuia utilizând raţionamentele geometriei.
Mărimea unui unghi se măsoară cu instrumente specifice sau se compară cu mărimea altuia utilizând raţionamentele geometriei.

Teoreme în triunghiul dreptunghic

Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în *A*, $AD \perp BC, D \in BC, BM = CM, M \in (BC)$:

- <u>Teorema lui Pitagora</u> : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

- ✓ Teorema înălţimii : $AD^2 = BD \cdot CD$
- ✓ Teorema catetei : $AB^2 = BD \cdot BC, AC^2 = CD \cdot BC$
- ✓ Teorema unghiului de $30^0 : m(\sphericalangle B) = 30^0 \Rightarrow AC = \dfrac{BC}{2}$
- ✓ Teorema medianei din vârful unghiului drept: $AM = \dfrac{BC}{2}$

Congruenţa triunghiurilor oarecare

Definiţia Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile respectiv congruente şi unghiurile respectiv congruente.

Cazurile de congruenţă

$LUL : AB = MN, \ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, AC = MP \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

$ULU : \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, AB = MN, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

$LLL : AB = MN, BC = NP, AC = MP \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

Congruenţa triunghiurilor dreptunghice

Cazurile de congruenţă

Fie $\Delta ABC, \ m(\sphericalangle A) = 90^0$, şi ΔMNP, $m(\sphericalangle M) = 90^0$.

$CC : AB = MN, AC = MP \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

$CU : AB = MN, \ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

$IU : BC = NP, \ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

$CI : AB = MN, BC = NP \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta MNP$

Asemănarea triunghiurilor

Definiţia, Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente şi laturile respectiv proporţionale.

$\Delta ABC \sim \Delta MNP$ dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ şi $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{AC}{MP} = k$, k fiind raportul de asemănare (pentru k = 1 triunghiurile sunt şi congruente)

Cazurile de asemănare

$UU : \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M, \sphericalangle B \equiv \sphericalangle N \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$

$LUL : \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{AC}{MP}, \sphericalangle A \equiv \sphericalangle M \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$

$LLL : \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{AC}{MP} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$

Mărimi direct proporţionale

Mărimile a, b, c sunt **direct proporţionale (proporţionale)** cu mărimile x, y, z dacă $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z} = k$, k fiind raportul de proporţionalitate

Mărimi invers proporţionale

Mărimile a, b, c sunt **invers proporţionale** cu mărimile x, y, z dacă $\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}}$ sau $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z$.

Calculul ariilor

Aria unui triunghi

Fie ΔABC, unde b = lungimea unei laturi (bază), h = lungimea înălţimii corespunzătoare bazei, R = raza cercului circumscris triunghiului, r = raza cercului înscris triunghiului, $p = \frac{AB + BC + AC}{2}$, p = semiperimetrul triunghiului. Aria ΔABC se calculează cu una din formulele : $A = \frac{b \cdot h}{2}, A = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}$ (sau celelalte echivalente),

$A = p \cdot r, A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}, A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formula lui Heron), $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$

Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, cu raportul de asemănare k, atunci $\frac{A_{ABC}}{A_{MNP}} = k^2$.

Aria unui paralelogram

$A = b \cdot h$, b = baza, h = înălţimea

Aria unui dreptunghi

$A = L \cdot l$, L, l = dimensiunile dreptunghiului

Aria unui romb

$A = b \cdot h$ sau $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, unde d_1, d_2 = lungimile diagonalelor

Aria unui pătrat

$A = l^2$, l = lungimea laturii, sau $A = \frac{d^2}{2}$, d = lungimea diagonalei

Aria unui trapez

$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$, B = lungimea bazei mari, b = lungimea bazei mici, h = înălţimea

<u>Aria unui patrulater convex</u> cu diagonalele d_1, d_2 şi măsura unghiului dintre ele x se calculează cu formula $A = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin x}{2}$.

Pentru calculul figurilor geometrice complexe se descompun în figuri geometrice simple şi se adună ariile acestor figuri simple.

Două triunghiuri (poligoane) congruente au ariile egale.

Mediana unui triunghi formează cu laturile triunghiului două triunghiuri de arii egale.

Inegalităţi geometrice

- Într-un triunghi, unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare şi reciproc.
- În triunghiul dreptunghic ipotenuza este mai mare decât fiecare din catete.
- Lungimea unei laturi a unui triunghi este mai mare decât valoarea absolută a diferenţei lungimilor celorlalte două şi mai mică decât suma lungimilor lor.

- Dintre două oblice duse din acelaşi punct spre aceeaşi dreaptă, cea mai depărtată de piciorul perpendicularei din acel punct este cea mai lungă.
- Un unghi exterior al unui triunghi este mai mare decât oricare din unghiurile triunghiului neadiacente cu el.

Teoreme în geometria plană

Teorema lui Thales. Dacă $D \in AB, E \in AB, DE \Pi BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Reciproca teoremei lui Thales. Dacă $D \in AB, E \in AC, \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \Pi BC$.

Teorema fundamentală a asemănării. Dacă $D \in AB, E \in AC$, $DE \Pi BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Teorema bisectoarei. Dacă $[AD]$ $(D \in BC)$ este bisectoare în $\Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

<u>Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic</u>

Fie ΔABC, dreptunghic în A.

$\sin B = \frac{AC}{BC}; \cos B = \frac{AB}{BC}; tgB = \frac{AC}{AB}; ctgB = \frac{AB}{AC}$

Relaţii între rapoartele constante

$\sin x = \cos(90^0 - x); \cos x = \sin(90^0 - x); tgx = ctg(90^0 - x); ctgx = tg(90^0 - x); tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; ctgx = \frac{\cos x}{\sin x};$

$ctgx = \frac{1}{tgx}; \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Unghiul x	sin x	cos x	tg x	ctg x
0^0	0	1	0	\
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	1	0	\	0

Pentru a dovedi că punctele *A*, *B*, *C* sunt **coliniare** este suficient să demonstrăm că:

- ✓ $m(\triangleleft CAB) = 0^0$ (sau echivalente), sau
- ✓ $m(\triangleleft ABC) = 180^0$ (sau echivalente), sau
- ✓ $d(C, AB) = 0$ (sau echivalente), sau
- ✓ $AB + BC = AC$ (sau echivalente), sau
- ✓ există o dreaptă d faţă de care $AB \parallel d$ şi $BC \parallel d$

Pentru a dovedi că trei drepte sunt **concurente** este suficient să demonstrăm că :

- ✓ cele trei drepte conţin sau înălţimile, sau medianele, sau bisectoarele, sau mediatoarele unui triunghi, sau

- ✓ cea de-a doua dreaptă împarte un segment din prima în acelaşi raport pe care îl împarte cea de a treia, sau
- ✓ două puncte de pe o dreaptă sunt coliniare cu punctul de intersecţie a celorlalte două

Cercul

- Dacă trei puncte sunt necoliniare, atunci determină un cerc şi numai unul.
- Două cercuri sunt congruente dacă razele lor sunt egale.
- În acelaşi cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente (şi reciproc).
- Demonstrăm că o dreaptă este tangentă unui cerc :
  - arătând că distanţa de la centrul cercului la dreaptă este egală cu raza cercului, sau
  - raza în acest punct este perpendiculară pe dreaptă.
- Dacă este *r* lungimea razei cercului, avem :
  - lungimea cercului = $2\pi r$;
  - aria discului = πr^2 ;
  - lungimea unui arc de cerc $l_{MPN} = \dfrac{\pi r n^0}{180^0}$;
  - aria sectorului circular $A = \dfrac{\pi r^2 n^0}{360^0}$;
  - lungimea unei coarde $0 < AB \leq 2r$.
- Măsura unui arc de cerc este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător.
- Măsura unui unghi înscris în cerc (vârful este pe cerc, o latură este o coardă, iar cealaltă este coardă sau tangentă în acel punct) este jumătate din măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale.
- Măsura unui unghi cu vârful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurilor arcelor cuprinse între laturile unghiului şi prelungirea laturilor lui.
- Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul cercului este egală cu jumătate din valoarea absolută a diferenţei măsurilor arcelor cuprinse între laturile lui.

Drepte şi plane în spaţiu

- ✓ Pentru a dovedi că o dreaptă neinclusă în plan este **paralelă** cu planul arătăm că este paralelă cu o dreaptă din plan.
- ✓ Pentru a dovedi că o dreaptă este **perpendiculară** pe un plan arătăm că este perpendiculară pe două drepte concurente din plan.
- ✓ Pentru a dovedi că două plane sunt **perpendiculare** găsim într-unul din plane două drepte concurente paralele cu al doilea plan.
- ✓ Prin unghiul format de două drepte necoplanare se înţelege unghiul format de o paralelă la una din drepte cu cealaltă dreaptă pe care o intersectează.
- ✓ Prin **unghiul** format de o dreaptă (neinclusă şi neparalelă) şi un plan se înţelege complementul unghiului format de dreaptă şi o perpendiculară pe plan sau unghiul format de dreaptă şi proiecţia ei pe plan, dacă dreapta nu este perpendiculară pe plan.

Poligoane regulate

Notaţii: *l* – lungimea laturii; *a* – apotema; *P* – perimetrul; *A* – aria; *u* – măsura unui unghi;
n – numărul laturilor; *R* – raza cercului circumscris; *h* – înălţimea; *d* - diagonala

Formule: $P = n \cdot l$ $A = \frac{a \cdot P}{2}$ $u = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$

Triunghiul echilateral

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $P = 3l$ $a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$ $R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

$l = R\sqrt{3}$ $a = \frac{R}{2}$ $A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

<u>Pătratul</u>

$d = l\sqrt{2}$ $a = \frac{l}{2}$ $R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ $A = l^2$ $P - 4l$

$l = R\sqrt{2}$ $a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ $A = 2R^2$

<u>Hexagonul regulat</u>

$l = R$ $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ $A = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ $P = 6l$

Prin <u>măsura unghiului format de două plane secante</u> se înţelege :
- ✓ cea mai mică dintre măsurile diedrelor determinate de aceste plane, sau
- ✓ măsura unghiului dintre două drepte perpendiculare respectiv pe planele date

Se arată că <u>două plane sunt perpendiculare</u> :
- ✓ fie demonstrând că unghiul format de ele este de 90, sau
- ✓ găsind în unul din plane o dreaptă perpendiculară pe celălalt plan

Teorema celor trei perpendiculare

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ BC \perp d \\ BC, d \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp d \Leftrightarrow d(A;d) = AC$$

Reciproca 1 a teoremei celor trei perpendiculare

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ AC \perp d \\ BC, d \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp d$$

Reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp BC \\ BC \perp d \\ AC \perp d \\ BC, d \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp \alpha \Leftrightarrow d(A;\alpha) = AB$$

Prisma dreaptă este prisma în care muchiile laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor.
<u>Prisma regulată</u> este prisma dreaptă în care bazele sunt poligoane regulate.
<u>Cubul</u> este prisma dreaptă cu toate feţele pătrate.
<u>Paralelipipedul dreptunghic</u> este prisma dreaptă cu toate feţele dreptunghiuri.
Piramida regulată este piramida cu baza poligon regulat şi muchiile laterale congruente.
<u>Tetraedru regulat</u> este piramida regulată cu toate muchiile congruente.

Înălţimea prismei este distanţa dintre planele bazelor (la prisma dreaptă este lungimea unei muchii laterale).
Înălţimea piramidei este distanţa de la vârf la planul bazei (la piramida regulată este lungimea segmentului determinat de vârf şi centrul bazei)
Două puncte sunt simetrice faţă de o dreaptă dacă dreapta este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte (sau distanţele de la fiecare punct la dreaptă sunt egale)
O dreaptă se numeşte axă de simetrie pentru o figură geometrică dacă fiecare punct al figurii are un simetric faţă de dreaptă ce aparţine tot figurii.
Două puncte sunt simetrice faţă de un punct dacă punctul este mijlocul segmentului determinat de cele două puncte.
Un punct se numeşte centru de simetrie (centru) pentru o figură geometrică dacă fiecare punct al figurii are un simetric faţă de acel punct ce aparţine tot figurii.
Se numeşte secţiune figura geometrică obţinută prin intersecţia unui corp geometric cu un plan.
Se numeşte desfăşurata unui corp geometric figura plană obţinută prin decuparea şi lipirea feţelor corpului.
Se numeşte corp de rotaţie (corp rotund) un corp obţinut prin rotirea unei figuri plane în jurul unei drepte (numită axă de rotaţie)
Se numeşte secţiune axială figura geometrică obţinută prin intersecţia unui corp rotund cu un plan ce include axa de rotaţie.
Se numeşte secţiune diagonală figura geometrică obţinută prin intersecţia unei prisme cu un plan ce include o diagonală a prismei.

Calcul de arii şi volume

Aria şi volumul cubului
l – latura (muchia) cubului; d – diagonala cubului; d_1 - diagonala unei feţe
d = $l\sqrt{3}$; $d_1 = l\sqrt{2}$; $A_l = 4l^2; A_t = 6l^2; V = l^3$
aria cubului = aria totală a cubului
secţiune diagonală = secţiune ce cuprinde o diagonală a cubului
aria secţiunii diagonale = $l^2\sqrt{2}$

Aria şi volumul paralelipipedului dreptunghic
L, l, h – dimensiunile
$A = 2(L \cdot l + L \cdot h + l \cdot h)$; $V = L \cdot l \cdot h$
Dacă L = l = h paralelipipedul dreptunghic devine cub.

Aria şi volumul prismei
$A_l = P_b \cdot h$; $A_t = A_l + 2A_b$; $V = A_b \cdot h$

1. Baza triunghi echilateral : $P_b = 3l; A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
2. Baza pătrat : $P_b = 4l; A_b = l^2$

3. Baza hexagon regulat : $P_b = 6l; A_b = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

Aria şi volumul piramidei

$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$; $A_t = \frac{P_b(a_p + a_b)}{2}$; $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$

1. Baza triunghi echilateral : $a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6}; R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$
2. Baza pătrat : $a_b = \frac{l}{2}; R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$
3. Baza hexagon regulat : $a_b = \frac{l\sqrt{3}}{2}; R = l$

Relaţii între elementele unei piramide regulate

- $h^2 + a_b^2 = a_p^2$; $h^2 + R^2 = m^2$; $a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = m^2$

dreapta suport a înălţimii piramidei regulate = axă de simetrie
secţiune axială într-o piramidă = secţiune ce include axa de simetrie a piramidei

Aria şi volumul trunchiului de piramidă

$A_l = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$; $A_t = A_l + A_B + A_b$; $V = \frac{1}{3} \cdot h\left(A_b + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$.

1. Baza este triunghi echilateral : $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(L^2 + l^2 + L \cdot l\right)$
2. Baza este pătrat : $V = \frac{1}{3} \cdot h\left(L^2 + l^2 + L \cdot l\right)$
3. Baza este hexagon regulat : $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(L^2 + l^2 + L \cdot l\right) = \frac{h\sqrt{3}}{2}\left(L^2 + l^2 + L \cdot l\right)$

Relaţii între elementele unui trunchi de piramidă

- $h^2 + (a_B - a_b)^2 = a_t^2$; $h^2 + (R - r)^2 = m^2$; $a_t^2 + \left(\frac{L - l}{2}\right)^2 = m^2$

Dacă $\frac{l}{L} = k$, k – raportul de asemănare, atunci : $\frac{r}{R} = \frac{a_b}{a_B} = \frac{h'}{h} = \frac{m'}{m} = k; \frac{A_b}{A_B} = \frac{A_l'}{A_l} = k^2; \frac{V'}{V} = k^3$

Aria şi volumul cilindrului circular drept

A_l = 2πRG ; $A_t = A_l + 2A_b; A_t$ = 2πR(G + R) ; V = π $R^2 h$; A_{SA} =2Rh

La cilindru h = G.
dreapta suport a centrelor celor două baze = axă de simetrie a cilindrului
secţiune axială = secţiune ce cuprinde axa de simetrie a cilindrului

Aria şi volumul conului circular drept

A_l = πRG ; $A_t = A_l + A_b; A_t$ =πR(G + R) ; A_{SA} = Rh ; $V = \frac{pR^2 h}{3}$

La con $h^2 + R^2 = G^2$.
axa de simetrie a conului = dreapta determinată de centrul bazei şi vârful conului

secţiune axială = secţiune ce cuprinde axa de simetrie a conului

Aria şi volumul trunchiului de con circular drept

$A_l = \pi G(R + r)$; $A_t = A_l + A_B + A_b$; $A_t = \pi G(R + r) + \pi\left(R^2 + r^2\right)$; $V = \frac{ph}{3}\left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)$; $A_{SA} = (R+r)h$

Dacă $\frac{r}{R} = k$, atunci $\frac{h'}{h} = \frac{g'}{g} = k, \frac{A_b}{A_B} = \frac{A_l'}{A_l} = k^2, \frac{V'}{V} = k^3$

Aria şi volumul sferei

$A = 4\pi R^2; V = \frac{4pR^3}{3}$.