Probleme propuse

1. Se consideră funcția f:**R**→**R** dată prin $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ e^x+1, & x\geq 0 \end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe **R**.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 xf(x^2)dx=\frac{e}{2}$.

2. Se consideră funcțiile f, g :**R**→**R** definite prin $f(x) = \ln(x^2+1)$ și $g(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

a) Să se arate că $\int_0^1 f'(x)dx=\ln 2$.

b) Să se demonstreze că $\int g(x)dx=f(x)+C$.

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}dx$.

3. Se consideră integralele $I_n=\int_e^{e^2} x\ln^n x dx$, pentru orice $n\in$**N**.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in$**N**.

c) Utilizând metoda integrării prin părți să se demonstreze că are loc relația

$I_n=\frac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in$**N***.

4. Se consideră funcția f:**R**→**R** dată prin $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\geq 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$.

a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

b) Să se determine $a\in(0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^{a} f(x)dx=1$.

c) Utilizând faptul că $e^x \geq 1$ pentru orice $x\geq 0$ să se calculeze $\int_0^1 xf\left(e^x\right)dx$.

5. Se consideră funcțiile f,F : $(0,+\infty)\to$ **R**, $f(x)=1-\frac{1}{x}$ și $F(x)=x-\ln x$.

a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x)\cdot f(x)dx$.

c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

6. Se consideră funcțiile $f, g : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ şi $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$.

a) Să se arate că $\int_1^4 f(x)\,dx = \ln 4 + 2$.

b) Utilizând metoda integrării prin părți să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\,dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$.

c) Să se arate că există un punct $x_0 \in (1,4)$ astfel încât $g(x_0) < f(x_0)$.

7. Se consideră funcțiile $f, g : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, şi $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ şi $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Să se verifice că $\int_1^e g(x)\,dx = 1$.

b) Folosind identitatea $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x > 0$, să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

c) Utilizând inegalitatea $f(x) \le \frac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x \in [1,e]$, să se arate că $\ln\frac{e^2+1}{2} \ge \frac{e+1}{e}$.

8. Se consideră funcția $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_1^e f(x)\,dx$.

b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația, în jurul axei Ox, a graficelor funcțiilor $g, h : [1,e] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x)$ şi $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

9. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - x$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x)\,dx = e - \frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c) Să se arate că dacă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = F(2) - F(1)$.

10. Se consideră funcțiile $f, g : [1,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ şi $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x)dx$. **c)** Să se rezolve în $[1,+\infty)$ ecuația $\int_1^a f(x)dx = 2$.

11. Se consideră funcția $f:\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\to \mathbf{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

a) Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

b) Să se calculeze $\int_1^5 \sqrt{2x-1}dx$.

c) Știind că $F:\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\to \mathbf{R}$ definită prin $F(x)=\frac{2x-1}{2}\sqrt{2x-1}$ este o primitivă a lui *f*, să se arate că $\int_1^5 f(x)\cdot F^{2008}(x)dx = \frac{3^{6027}-1}{2009\cdot 3^{2009}}$.

12. Pentru fiecare $n\in\mathbf{N}$ se consideră integralele $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}dx$.

a) Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) Să se calculeze I_1.

c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$.

13. Se consideră integralele $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n\left(x^2+1\right)}dx$, unde $n\in\mathbf{N}$.

a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x\neq 0$, să se determine I_1.

c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right)$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

14. Se consideră funcțiile *f*, *g* : $(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

a) Să se arate că funcția *f* este o primitivă a funcției *g*.

b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x)\cdot g(x)dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x)\cdot f''(x)dx = -1$, unde f'' este derivata a doua a funcției *f*.

15. Se consideră funcțiile *f*, *g* : $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ și $g(x) = x$.

a) Să se verifice că $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx = e-1$.

b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$.

c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f\left(x^n\right)\cdot g^{2n-1}(x)\,dx = \dfrac{e-1}{2n}$, oricare ar fi $n\in\mathbf{N}^*$.