Ecuații de gradul al doilea

$ax^2 + bx + c = 0$, $a,b,c\in\mathrm{R}$, $a \neq 0$

1. ***Formule de rezolvare***: $\Delta > 0$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$; sau

$x_1 = \dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$, $x_2 = \dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$, $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$.

Relații între coeficienți și rădăcini:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

2. ***Formule utile în studiul ecuației de gradul al II-lea:***

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 2SP$

$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1^2x_2^2 = S^4 - 4S^2P + 2P^2$

3. ***Discuția naturii şi semnul rãdãcinilor*** în funcție de semnele lui $\Delta = b^2 - 4ac$, $P = x_1x_2$, $S = x_1 + x_2$.

Δ	P	S	Natura şi semnul rãdãcinilor
$\Delta < 0$	-	-	Rãdãcini complexe: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	-	-	Rãdãcini reale şi egale $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta > 0$, $x_1 \neq x_2$	$P > 0$	$S > 0$	Rãdãcini reale pozitive
	$P > 0$	$S < 0$	Rãdãcini reale negative
	$P < 0$	$S > 0$	Rãdãcini reale şi de semne contrare; cea pozitivã este mai mare decât valoarea absoluta a celei negativi
	$P < 0$	$S < 0$	Rãdãcini reale şi de semne contrare; cea negativã este mai mare în valoare absolutã.

4. ***Semnul funcției*** $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$

$\Delta > 0$: $a \neq 0$, $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

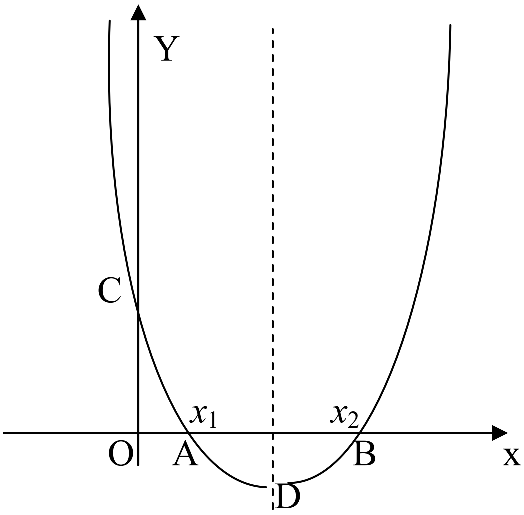
$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	0	semnul lui a	

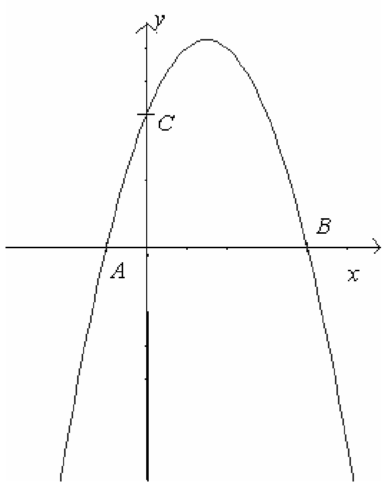
$\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui a	

5. *Graficul funcției* f:**R**→**R**, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in$ **R** este o *parabolã*. Această funcție se poate scrie și sub forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, numitã formã canonicã.



$\Delta > 0$
$a > 0$
$A(x_1,0)$
$B(x_2,0)$
$C(0,c)$
$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$



1. ***Maximul sau minimul funcției de gradul al doilea***

1. Dacã $a > 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, minim ce se realizeazã pentru x = $\frac{-b}{2a}$
2. Dacã $a < 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are un maxim egal cu $\frac{-\Delta}{4a}$, maxim ce se realizeazã pentru x = $\frac{-b}{2a}$

7. *Intervale de monotonie pentru funcția de gradul al doilea*

Teoremã. Fie funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

1. Dacã $a > 0$, funcția f este strict descrescãtoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict crescãtoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.
2. Dacã $a < 0$, funcția f este strict crescãtoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict descrescãtoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

Observație: Intervalele $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc ***<u>intervale de monotonie</u> ale funcției f***.

Descompunerea trinomului $aX^2 + bX + c$, $a,b,c\in\mathbf{R}$, $a\neq0$, x_1 şi x_2 fiind rãdãcinile trinomului.

1. $\Delta > 0$, $f(x) = a(X - x_1)(X - x_2)$;
2. $\Delta = 0$, $f(x) = a(X - x_1)^2$;
3. $\Delta < 0$, $f(x)$ este ireductibil pe $\mathbf{R}$.

Scrierea ecuaţii de gradul al doilea când se cunosc suma şi produsul rãdãcinilor ei: $x^2 - Sx + P = 0$, cu $S = x_1 + x_2$ şi $P = x_1x_2$.

Teoremã: Ecuaţiile $ax^2 + bx + c = 0$ şi $a'x^2 + b'x + c' = 0$, $\forall a,b,c,a',b',c'\in\mathbf{R}$, a,a'≠0, au cel puţin o rãdãcinã comunã dacã şi numai dacã:

$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$

Condiţii necesare şi suficiente pentru ca numerele reale date α *şi* β *sã fie în anumite relaţii cu rãdãcinile* x_1 *şi* x_2 *ale ecuaţiei de gradul al doilea* $f(x)=ax^2 + bx + c$ $a,b,c\in R$, $a\neq0$, *respectiv, pentru ca f(x) sã pãstreze un semn constant* $\forall x, x\in R$.

Nr.crt.	*Relaţii între* x_1, x_2, α *şi* β	*Condiţii necesare şi suficiente*
1	$\alpha < x_1 < \beta < x_2$ sau $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$	1. $f(\alpha)f(\beta) < 0$
2	$\alpha < x_1 \leq x_2 < \beta$	1. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 2. $af(\alpha) > 0$ 3. $af(\beta) > 0$ 4. $\alpha < \frac{-b}{2a}$ 5. $\beta > \frac{-b}{2a}$
3	$x_1 < \alpha < \beta < x_2$	1. $af(\alpha) < 0$ 2. $af(\beta) < 0$ ceea ce atrage dupã sine $\Delta > 0$
4	$x_1 < \alpha < x_2$	1. $af(\alpha) < 0$
5	$\alpha < x_1 \leq x_2$	1. $\Delta = 0$ 2. $af(\alpha) > 0$ 3. $\alpha < \frac{-b}{2a}$
6	$x_1 \leq x_2 < \alpha$	1. $\Delta = 0$ 2. $af(\alpha) > 0$ 3. $\frac{-b}{2a} < \alpha$
7	$f(x) = 0, \forall x\in R$	1. $\Delta \leq 0$ 2. $a > 0$
8	$f(x) \leq 0, \forall x\in R$	1. $\Delta \leq 0$ 2. $a < 0$

Probleme propuse

1. Să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-x-2=0$.
2. Să se calculeze suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2-5x+5\leq 1$.
3. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=mx^2-8x-3$, unde m este un număr real nenul. Să se determine m ştiind că valoarea maximă a funcției f este egală cu 5.
4. Fie funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-x+1$ şi $g(x)=x+4$. Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f şi g.
5. Să se calculeze $x_1+x_2+x_1x_2$ ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-2x-2=0$.
6. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=mx^2-mx+2$,$m\in\mathbf{R}^*$. Să se determine numărul real nenul m ştiind că valoarea minimă a funcției este egală cu 1.
7. Să se determine $m\in\mathbf{R}$, ştiind că $\left\{x\in\mathbf{R} \mid x^2-(m+2)x+m+1=0\right\}=\{1\}$.
8. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x2-25$. Să se calculeze $f(-5)\cdot f(-4)\cdot...\cdot f(0)\cdot...\cdot f(4)\cdot f(5)$.
9. Se consideră funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3x^2-3x+1$şi $g(x)=x-1$. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $f(x) = -g(x)$.
10. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-11x+30$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot...\cdot f(6)$.
11. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+5x+\mathrm{m}+6$. Să se determine valorile numărului real m ştiind că $f(x)\geq 0$, pentru $\forall x\in\mathbf{R}$.
12. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 şi x_2 verifică simultan relațiile $x_1+x_2=1$ şi $x_1x_2 = -2$.
13. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze $f(0)\cdot f(1)\cdot\ldots\cdot f(2008)$.
14. Să se determine o ecuație de gradul al II-lea ale cărei soluții x_1 şi x_2 verifică simultan relațiile $x_1+x_2=2$ şi $x_1x_2 = -3$.
15. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale reprezentării grafice a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},f(x)=-x^2+2x+8$, cu axa Ox .
16. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-8x+7$. Să se calculeze distanța dintre punctele determinate de intersecția graficului funcției f cu axa Ox.
17. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-6x+5$. Să se determine punctul de intersecție al dreptei de ecuație $y = -4$ cu reprezentarea grafică a funcției f.
18. Să se demonstreze că ecuația $x^2-2x+1+a^2=0$ nu admite soluții reale, oricare ar fi $a\in\mathbf{R}^*$.
19. Să se determine valorile reale ale lui m , ştiind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-mx+m-1$ este egală cu $-\frac{1}{4}$.
20. Să se determine $m\in\mathbf{R}$, ştiind că soluțiile x_1,x_2 ale ecuației $x^2-(2m+1)x+3m=0$ verifică relația $x_1+x_2+x_1x_2=11$.
21. Se consideră ecuația $x^2+3x-5=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2 . Să se calculeze $x_1^2+x_2^2$.
22. Să se arate că $(x-1)(x-2)>x-3$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

23. Se consideră ecuația $x^2+mx+2=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2 . Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $(x_1+x_2)^2 -2x_1x_2=5$.
24. Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-(2m+1)x+3$, $m\in\mathbf{R}$, al cărei grafic are abscisa vârfului egală cu $\frac{7}{2}$.
25. Să se rezolve inecuația $(2x-1)^2\le 9$.
26. Să se demonstreze că parabola asociată funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox , oricare ar fi $m\in\mathbf{R}$.
27. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+mx+2$. Să se determine numerele reale m pentru care minimul funcției f este egal cu $-\frac{1}{4}$.
28. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, ştiind că aceasta are soluțiile $x_1=2$ şi $x_2= 3$.
29. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2-2x+y=0 \end{cases}$.
30. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $x^2-9\le 0$.
31. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2+3$. Să se rezolve inecuația $f(x)\le 12$.
32. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+4x-5$.
33. Se consideră ecuația $x^2-x+m=0$ cu soluțiile x_1 şi x_2 . Să se determine numărul real m pentru care $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=-\frac{3}{4}$.
34. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-3x+1$. Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparține graficului funcției f.
35. Să se determine funcția de gradul al II-lea al cărei grafic conține punctele $A(1;3)$, $B(0;5)$ şi $C(-1;11)$.
36. Să se determine valorile reale ale parametrului m ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2+(m-1)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1= 3x_2$.
37. Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=mx^2-x+1$ să conțină punctul $A(2,3)$.
38. Să se determine valorile reale ale lui m ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-(m^2+3)x+3=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2+x_1x_2=7$.
39. Să se determine valorile reale ale parametrului m astfel încât ecuația $x^2+mx+9=0$ să admită două soluții egale.
40. Să se arate că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-x-1=0$ verifică relația $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2+2$.
41. Să se determine valorile reale ale numărului m ştiind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2mx+3m$ este egală cu 2.
42. Să se determine valorile reale nenule ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=mx^2-(m+1)x+1$ este tangent axei Ox.
43. Să se determine numerele reale m ştiind că valoarea maximă a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)= -x^2 +2x-m+3$ este egală cu 10.

44. Să se determine valorile reale ale numărului m ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-mx+m+2=0$ verifică egalitatea $2x_1x_2=x_1+x_2$.

45. Ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-2008x+1=0$, să se calculeze $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

46. Să se determine valorile reale ale lui m , ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-mx-m-6=0$ verifică relația $4(x_1+x_2)+x_1x_2=0$.

47. Să se determine m real astfel încât soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2+2x+6m-1=0$ să verifice relația $x_1+x_2=x_1x_2$.

48. Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-1$ cu axele de coordonate.

49. Să se demonstreze că pentru orice $m\in\mathbf{R}$ ecuația $x^2+mx-m^2-1=0$ are două soluții reale distincte.

50. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $x(x-1)\le x+15$.

51. Să se determine valorile reale ale numărului m astfel încât reprezentarea grafică a funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-(m-1)x-m$ să fie tangentă la axa Ox.

52. Să se determine soluțiile reale ale inecuației $x^2-5x+6\le 0$.

53. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-ax+a$, unde $a\in\mathbf{R}$. Să se determine a astfel încât minimul funcției f să fie 1.

54. Să se arate că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-(2m-3)x+m-1=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2-2x_1x_2=-1,\ \forall m\in\mathbf{R}$.

55. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2x+2$. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției are cooordonatele egale.

56. Să se arate că mulțimea $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2-(2m+1)x+m^2+m=0\}$ are două elemente, oricare ar fi $m\in\mathbf{R}$.

57. Să se formeze o ecuație de gradul al doilea, ale cărei soluții verifică relațiile $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=30 \end{cases}$.

58. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2-3x+5 \end{cases}$.

59. Să se arate că, oricare ar fi $m\in\mathbf{R}$, parabola asociată funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-mx+m^2+1$ este situată deasupra axei Ox.

60. Să se determine valoarea parametrului real m , ştiind că soluțiile x_1 şi x_2 ale ecuației $x^2-(m-1)x-m=0$ verifică relația $x_1+x_2=2(x_1x_2+4)$.

61. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+x=y \end{cases}$.

62. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $(2x-1)(x+1)\le -x+11$.

63. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=-x^2+4x+6$. Să se arate că $f(x)\le f(2)$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

64. Ecuația $x^2+px-p=0$, cu $p\in\mathbf{R}$, are soluțiile x_1 şi x_2. Să se verifice dacă expresia $x_1+x_2-x_1x_2$ este constantă.

65. Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-(m+1)x+m$, cu $m\in\mathbf{R}$. Să se arate că soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $f(x)=0$ verifică relaţia $x_1+x_2-x_1x_2=1$.
66. Să se demonstreze că parabola asociată funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$ este tangentă axei Ox.
67. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=-6 \\ xy=8 \end{cases}$.
68. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.
69. Se consideră ecuaţia de gradul al doilea $x^2-x+m=0$. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât ecuaţia să admită soluţii de semne contrare.
70. Să se arate că vârful parabolei asociate funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$ se află pe dreapta de ecuaţie $3x+y+1=0$.
71. Să se rezolve inecuaţia $(x^2-1)(x+1)\geq 0$.
72. Să se arate că produsul soluţiilor ecuaţiei $mx^2-2008x-m=0$ este constant, oricare ar fi $m\in\mathbf{R}^*$.
73. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^2-4x+1$, $g(x)=2x-1$. Să se rezolve ecuaţia $f(x)+2g(x)=-1$.
74. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$. Să se calculeze produsul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.
75. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2+mx+2$. Să se determine numărul real m astfel încât minimul funcţiei să fie egal cu -2.
76. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$. Să se demonstreze că $f(x)\geq -1$, oricare ar fi numărul real x.
77. Să se determine numărul real m astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-mx-1=0$ să fie numere reale opuse.
78. Să se determine parametrul real m astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+m=0$ să fie inverse una alteia.
79. Să se determine $m\in\mathbf{R}^*$ astfel încât soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+m=0$ să aibă semne opuse.
80. Să se determine coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^2-12x+9$.

Virgil-Mihail Zaharia