Structuri algebrice

1. Monoid

Fie (M,*), MxM→M, $(x,y)\to x*y$, M-nevidã.

Axiomele monoidului:

M1. $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x,y,z\in$M (asociativitatea);

M2. $\exists$ $e\in$M astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$M (e element neutru);

dacã **M3.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$M monidul este comutativ.

Ex: 1. (**N**,+), (**N**,·) sunt monoizi comutativi;

2. (F(E),o) monoid necomutativ (F(E) este mulţimea funcţiilor f:E→E, E – nevidã, o – compunerea funcţiilor).

2. Grup

Fie (G,*), GxG→G, $(x,y)\to x*y$, G-nevidã.

Axiomele grupului:

G1. $(x*y)*z = x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in$G(asociativitatea);

G2. $\exists$ $e\in$G astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$G (e element neutru);

G3. $\forall$ $x\in$G $\exists$ $x'\in$G astfel încât $x'*x = x*x' = e$ (x' simetricul lui x);

dacã **G4.** $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$G grupul este comutativ (sau abelian).

Ex: 1. (Z,+), (Q,+), (R,+), (C,+) – grupuri comutative;

2. (R_n,$\oplus$) – grupul resturilor modulo n, comutativ;

3. (M_n(Z),+) – grupul matricilor pãtrate de ordin n cu elemente din Z;

4. (K, o) – grupul lui Klein (al simetriilor faţã de sistemul de coordonate), comutativ;

5. (σ_n, o) – grupul simetric de grad n (al permutãrilor de n elemente) nu este comutativ;

Definiţia 2.1. ***Fie (G,*) grup, H⊂G, H este <u>subgrup</u> dacã*** $\forall$ $x,y\in H \Rightarrow x*y\in H$ ***şi*** $\forall$ $x\in H \Rightarrow x'\in H$ ***(x' este simetricul lui x în raport cu operaţia *)***;

Fie grupurile (G_1,⊥), (G_2,Δ):

Definiţia 2.2. f:$G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>morfism de grupuri</u> dacã*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Definiţia 2.3. f:$G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>izomorfism de grupuri</u> dacã f este bijectivã şi*** $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in G_1$.

Definiţia 2.4. f:$G_1\to G_2$ ***se numeşte <u>automorfism (endomorfism)</u> al grupului*** G_1***, dacã f este un izomorfism (morfism).***

3. Inel

Fie (A,+,•), AxA→A, $(x,y)\to x+y$ şi AxA→A, $(x,y)\to x\bullet y$, A nevidã;

Definiţia 3.1. (A,+,•) ***este <u>inel</u> dacã:***

G. (A,+) este grup abelian;

M. (A,•) este monoid şi

D. • este distributivã faţã de +:

$x\bullet(y+z) = x\bullet$y $+ y\bullet z$

$(y+z)\bullet x = y\bullet x + y\bullet z$, $\forall x,y,z\in$A dacã **C.** $x \bullet y = y \bullet x$ $\forall x,y \in$ A, inelul este comutativ.

Exemple de inele:

1. (Z,+,·) – inelul numerelor întregi;
2. (Z[i],+, ·) – inelul întregilor lui Gauss, Z[i] = $\{z = a + bi \mid a,b \in Z\}$
3. (R_n,⊕,⊗) – inelul resturilor modulo n;
4. (M_n(A),+,·) – inelul matricelor pãtratice (cu elemente din inelul A);
5. (Z_n,+,·) – inelul claselor de resturi modulo n.

Fie inelele (A,⊥,*) şi (A',Δ,o):

Definiţia 3.1. f:A→A' ***se numeşte** **<u>izomorfism de inele</u>** **dacã** f **este bijectivã şi*** $f(x \perp y) = f(x) \Delta f(y), f(x * y) = f(x) o f(y)$, $\forall x,y \in$ A.

Definiţia 3.2. (A,+,•) ***este <u>inel fãrã divizori ai lui zero</u> dacã x≠0, y≠0 implicã x•y≠0.***

Definiţia 3.3. ***Un inel comutativ cu cel puţin douã elemente şi fãrã divizori ai lui zero se numeşte <u>domeniu integritate</u>***.

Definiţia 3.4. ***Dacã (A,+,·) este inel, atunci (A[X],+ ,·) este <u>inelul comutativ al polinoamelor cu coeficienţi în A</u>***.

$f \in$ A[X], $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ este forma algebricã a unui polinom de nedeterminatã X cu coeficienţi în A:

- dacã $a_n \neq 0$, grad $f = n$ (a_n – coeficient dominant);
- dacã $a_0 = a_1 = \ldots = a_n$, $f = 0$ (polinom nul), grad 0 = $-\infty$.

Proprietãţi: 1. grad $(f+g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$;

2. grad $f \cdot g \leq$ grad f + grad g.

Teoremã. Dacã A este domeniu de integritate atunci $A[X]$ este domeniu de integritate şi grad $f \cdot g$ = grad f + grad g, $\forall f,g \in A[X]$.

4. Corp

Fie (K,+,•), KxK→K, $(x,y) \to x+y$ şi KxK→k, $(x,y) \to x \bullet$y, K – nevidã.

Definiţia 4.1. ***(K,+,•) este <u>corp</u> dacã (K,+,•) este inel, 0≠1 şi*** $\forall$x∈K, x≠0 ⇒ ∃ $x^{-1} \in$K, ***astfel încât*** $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$.

Dacã $x \bullet y = y \bullet x$, $\forall x,y \in$ K, corpul este comutativ.

Exemple de corpuri:

1. (Q,+,·) – corpul numerelor raţionale;
2. (R,+, ·) – corpul numerelor reale;
3. (C,+, ·) – corpul numerelor complexe;
4. (Q($\sqrt{d}$),+,·) – corpul numerelor pãtratice (d∈Z, d – liber de pãtrate);
5. (Z_p,+, ·) – corpul claselor de resturi modulo p ($p \in$ N*, $p > 1$, p – numãr prim).

Definiţia 4.2. ***Fie corpurile (K,⊥,*) şi (K',Δ,o), f:K→K' este izomorfism de corpuri dacã f este bijectivã,*** $f(x \perp y) = f(x)\ \Delta\ f(y), f(x * y) = f(x)$ **o** $f(y)$ $\forall x,y \in$ **R.**

Caz general

Fie pe **R** operaţia $x\circ y=axy-abx-aby+b(ab+1)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$. Se cere:

1. Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$ $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$;
2. Să se arate că $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este funcţie bijectivă care verifică totodată $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$;
3. În cazul alegerii $a>0$ considerând $H=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$ considerând $H=(-\infty;b)$, să se arate că, $\forall x,y\in H$, are loc $x\circ y\in H$;
4. În cazul alegerii $a>0$ considerând $H=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$ considerând $H=(-\infty;b)$, să se arate că $f:H\to\mathbf{R}_+^*$, $f(t)=a(t-b)$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathbf{R}_+^*;\cdot)$;
5. Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, are loc $x\circ y=y\circ x$;
6. Să se arate că $\exists$ $x,y\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
7. Să se arate că $\exists$ $x,y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
8. Să se arate că $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, are loc $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;
9. Să se arate că $\exists e\in\mathbf{R}$ încât, $\forall x\in\mathbf{R}$, verifică $x\circ e=e\circ x=x$;
10. Să se arate că, $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{b\}$, $\exists x'\in\mathbf{R}\setminus\{b\}$ încât $x\circ x'=x'\circ x=\dfrac{1}{a}+b$;
11. În cazul alegerii $a>0$, considerând $H=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$, considerând $H=(-\infty;b)$, să se determine ce fel de structură este $(H,\circ)$;
12. Să se rezolve ecuaţia $x\circ\left(\dfrac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$, $x\in(0,+\infty)$, unde $A=$"an"$-b-c$, $B=$"an"$-b+c$, $C=ac^2+b$, $\forall c\in\mathbf{Z}$;
13. Să se arate că $\exists\theta\in\mathbf{R}$ încât $\forall x\in\mathbf{R}$ verifică $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$;
14. Să se determine valoarea expresiei $E=(-\text{"an"})\circ(-\text{"an"}+1)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ(\text{"an"}-1)\circ(\text{"an"})$;
15. Să se arate că, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, $x\circ y\circ z=a^2(x-b)(y-b)(z-b)+b$;
16. Să se rezolve în **R** ecuaţia $(\text{"an"}x^2-x+b)\circ(x^2-\text{"an"}x+b)=b$;
17. Să se rezolve în **R** ecuaţia $(b-|b|+d^x)\circ(\log_d x)\circ(b-1+C^x_{\text{"an"}})=b$, $\forall d\in\mathbf{N}$, $d\geq 2$;
18. Să se arate că $\underbrace{A\circ A\circ\ldots\circ A}_{de\,n\,ori}=a^{n-1}\cdot(A-b)^n+b$, $\forall n\in\mathbf{N}$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = "an";
19. Să se determine cel mai mic număr $n\in\mathbf{N}^*$ cu proprietatea $(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ\ldots\circ n\geq$ "an";
20. Să se rezolve în **R** ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a^4\cdot A^5+b$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = "an".

Rezolvare

1. Se verifică imediat, prin calcul direct:
   $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b=a(xy-bx-by+b2)+b=axy-abx-aby+b(ab+1)$
2. Justificarea bijectivităţii funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este imediată, ca funcţie de gradul întâi. Conform cu

$x\circ y=a(x-b)(y-b)+b \Rightarrow x\circ y-b=a(x-b)(y-b)| \cdot a \Rightarrow a(x\circ y-b)=a(x-b)\cdot a(y-b)$ este chiar cerinţa, respectiv $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$.

3. Fie $x\in H \Rightarrow (x-b)\geq 0$ şi $y\in H \Rightarrow (y-b)\geq 0$ şi atunci $(x-b)(y-b)\geq 0$, dar cum a este constantă nenulă şi de semn prestabilit, apartenenţa $a(x-b)(y-b)+b=x\circ y\in H$ este justificată.
4. Variaţia funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=a(t-b)$, studiată anterior, arată imediat că restricţia $f:H\to\mathbf{R}^*_+$ este bijectivă. Tot din datele anterioare, este evident că H este parte stabilă a structurii $(\mathbf{R};\circ)$ (item 3) şi că are loc proprietatea de morfism +(item 2), izomorfismul fiind astfel demonstrat.
5. Comutativitatea este imediată
6. Luând $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi alegând $x-b=\frac{2}{3}$ şi $y-b=\frac{3}{2}$, deoarece $b\in\mathbf{Z}$, evident $x,y\in\mathbf{Q}\backslash\mathbf{Z}$ şi $x\circ y=a+b\in\mathbf{Z}$.
7. Pe aceeaşi idee, alegând $x-b=\sqrt{2}-1$ şi $y-b=\sqrt{2}+1$, se va obţine $x,y\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ şi $x\circ y=a+b\in\mathbf{Z}$. Se observă că alegerea nu este unică, admiţând chiar o infinitate de posibilităţi.
8. Asociativitatea se demonstrează prin calcul
9. Din $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ şi $x\circ e=x$ conduce la $a(x-b)(e-b)+b=x$ din care se obţine $e=\frac{1}{a}+b$
10. Dubla egalitate $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{a}+b$ se reduce de fapt la $x\circ x'=\frac{1}{a}+b$ care se exprimă în forma $a(x-b)(x'-b)+b=\frac{1}{a}+b$, obţinând $x'=b+\frac{1}{a^2(x-b)}$ care este în mod evident din $\mathbf{R}\backslash\{b\}$, justificând afirmaţia din ***item 10***.
11. Structura $(H;\circ)$ se dovedeşte grup comutativ, verificarea proprietăţilor fiind asigurată de concluzii anterioare.
12. Cum $e=\frac{1}{a}+b,\ x\circ\left(\frac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$ devine $x\circ x=a\cdot A\cdot B+C$, adică $a(x-b)^2+b=a\cdot(\text{"an"}-b-c)\times(\text{"an"}-b+c)+ac^2+b$. Observând diferenţa de pătrate, din $a(x-b)^2=a\cdot[(\text{"an"}-b)^2-c^2]+ac^2$ se obţine $(x-b)^2=(\text{"an"}-b)^2$ şi în final $x=\text{"an"}$, în condiţia alegerii evidente $2b-\text{"an"}<0<\text{"an"}-b$.
13. Din $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ se observă $q=b$ cu proprietatea menţionată, $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$.
14. Cum $\theta=b$ se regăseşte printre „factorii” ce compun expresia E , răspunsul la este $E=\theta=b$.
15. Se obţine prin calcul folosind $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$.
16. Ecuaţia $(\text{"an"}x^2-x+b)\circ(x^2-\text{"an"}x+b)=b$ devine $(\text{"an"}x^2-x)(x^2-\text{"an"}x)=0$ şi răspunsul va fi $x\in\left\{0;\text{"an"};\frac{1}{\text{"an"}}\right\}$.
17. Ecuaţia devine $(d^x-|b|)(\log_d x-b)\left(C^x_{\text{"an"}}-1\right)=0$, deci $x\in\left\{\log_d|b|;d^b;0;\text{"an"}\right\}$.
18. Izomorfismul conduce imediat la $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=a^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n}(x_k-b)+b$ şi astfel identitatea $\underbrace{A\circ A\circ\ldots\circ A}_{de\ n\ ori}=a^{n-1}(A-b)^n+b$ este evidentă.

19. $(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ\ldots\circ n=a^{n-b-1}\cdot(n-b)!+b$ şi astfel se determină imediat răspunsul.
20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a^4\cdot(x-b)^5+b$ şi $a^4\cdot(x-b)^5+b=a^4\cdot A^5+b$ soluţia $x=A+b$.

Exemplul (corespunzător alegerii a=1, b=5, c=5 şi d=2)

Fie pe **R** operaţia $x\circ y=xy-5x-5y+30, \forall x,y\in\mathbf{R}$. Se cere:
1) Să se arate că, $\forall$ x,y$\in$**R**, $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$;
2) Să se arate că $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(t)=t-5$, este funcţie bijectivă, care verifică totodată $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$.
3) Considerând H = (5;+ ∞), să se arate că, $\forall x,y\in H$, are loc $x\circ y\in H$;
4) Considerând H = (5;+ ∞), să se arate că $f:H\to\mathbf{R}_+^*$, $f(t)=t-5$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathbf{R}^*_+;\cdot)$;
5) Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, are loc $x\circ y=y\circ x$;
6) Să se arate că $\exists\ x,y\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
7) Să se arate că $\exists\ x,y\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ încât $x\circ y\in\mathbf{Z}$;
8) Să se arate că, $\forall$ x,y,z $\in$**R**, are loc $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;
9) Să se arate că $\exists e\in\mathbf{R}$ încât $\forall x\in\mathbf{R}$ verifică $x\circ e=e\circ x=x$;
10) Să se arate că, $\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{5\}$, $\exists x'\in\mathbf{R}\setminus\{5\}$ încât $x\circ x'=x'\circ x=6$;
11) Considerând H = (5;+ ∞), să se determine ce fel de structură este (H, $\circ$);
12) Să se rezolve ecuaţia $x\circ 6\circ x=1999\cdot 2009+30$, $x\in(0,+\infty)$;
13) Să se arate că $\exists\theta\in\mathbf{R}$ încât $\forall x\in\mathbf{R}$ verifică $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$;
14) Să se determine valoarea expresiei
$E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009$;
15) Să se arate că, $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$, $x\circ y\circ z=(x-5)(y-5)(z-5)+5$;
16) Să se rezolve în **R** ecuaţia $(2009x^2-x+5)\circ(x^2-2009x+5)=5$;
17) Să se rezolve în **R** ecuaţia $(2^x)\circ(\log_2 x)\circ(4+C^x_{2009})=5$;
18) Să se arate că $\underbrace{2009\circ 2009\circ\ldots\circ 2009}_{de\ 2009\ ori}=2004^{2009}+5$
19) Să se determine cel mai mic număr $n\in\mathbf{N}^*$, cu proprietatea $6\circ 7\circ 8\circ\ldots\circ n\geq 2009$;
20) Să se rezolve în **R** ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=2009^5+5$

Rezolvare
1. Se calculează $(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=xy-5x-5y+30=x\circ y$
2. Funcţie de gradul I, bijectivă.
   $f(x\circ y)=f((x-5)(y-5)+5)=(x-5)(y-5)+5-5=(x-5)(y-5)=f(x)\cdot f(y)$.
3. $\left.\begin{array}{l} x\in H\Rightarrow x>5\Rightarrow x-5>0 \\ y\in H\Rightarrow y>5\Rightarrow y-5>0\end{array}\right\}\Rightarrow(x-5)(y-5)>0\,\big|+5\Rightarrow(x-5)(y-5)+5>5\quad\Rightarrow$
   $x\circ y>5\Rightarrow x\circ y\in H$
4. Calculând $f'(t)=1>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(5,\infty)$ şi deci bijectivă pe $(5,\infty)$. Morfismul este demonstrat la itemul 2.
5. $x\circ y=xy-5x-5y+30=yx-5y-5x+30=y\circ x$

6. Alegem x-5=$\frac{2}{3}$ şi y-5= $\frac{3}{2}$ obţinem $x=\frac{2}{3}+5=\frac{17}{3}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ şi $y=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$ şi calculăm
$$\frac{17}{3}\circ\frac{13}{2}=\left(\frac{17}{3}-5\right)\left(\frac{13}{2}-5\right)+5=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+5=1+5=6\in\mathbf{Z}.$$
7. Alegem x-5= $\sqrt{2}$-1 şi y-5= $\sqrt{2}$+1 $\Rightarrow$ x= $\sqrt{2}$+4$\in$**R\Q** şi y= $\sqrt{2}$+6$\in$**R\Q** şi calculăm
$$\left(\sqrt{2}+4\right)\circ\left(\sqrt{2}+6\right)=\left(\sqrt{2}+4-5\right)\cdot\left(\sqrt{2}+6-5\right)+5=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)+5=2-1+5=6\in\mathbf{Z}.$$
8. Asociativitatea:
$(x\circ y)\circ z=[(x-5)(y-5)+5]\circ z=[(x-5)(y-5)+5-5](z-5)+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5$
$x\circ(y\circ z)=x\circ[(y-5)(z-5)+5]=(x-5)[(y-5)(z-5)+5-5]+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5$
9. Elemental neutru $x\circ e=x \Rightarrow xe-5x-5e+30=x \Rightarrow xe-5e=6x-30 \Rightarrow e(x-5)=6(x-5) \Rightarrow$ $e=6\in H$.
10. $x\circ x'=6\Rightarrow xx'-5x-5x'+30=6 \Rightarrow xx'-5x'=5x-24 \Rightarrow x'(x-5)=5x-24 \Rightarrow$
$$x'=\frac{5x-24}{x-5}=\frac{5x-25+1}{x-5}=\frac{5(x-5)-1}{x-5}=5-\frac{1}{x-5}\neq 5\Rightarrow x'\in\mathbf{R}\setminus\{5\}$$
11. Din 5) H este parte stabilă, din 8) rezultă asociativitatea, din 9) elementul neutru, din 9) elementul simetric şi din 5) comutativitatea $\Rightarrow$ $(H,\circ)$ formează o structură de grup comutativ.
12. $x\circ 6\circ x=(x-5)(6-5)(x-5)+5$ şi obţinem $(x-5)^2+5=1994\cdot 2005+30 \Rightarrow$ $(x-5)^2=(1999-5)(1999+5)+25 \Rightarrow (x-5)^2=1999^2-25+25 \Rightarrow (x-5)^2=1999^2 \Rightarrow$ $x+5=\pm\ 1999 \Rightarrow x_1=1994$ şi $x_2=-2004$.
13. Determinăm pe θ astfel încât θ-5=0 $\Rightarrow$ θ=5. Verificăm: $x\circ 5=(x+5)(\theta-5)+5=5$.
14. Conform itemului 13) $x\circ 5=5$ şi în şirul care se compune există numîrul 5, deci $E=(-2009)\circ(-2008)\circ...\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ...\circ 2008\circ 2009=5$
15. Exprimarea de la acest punct s-a demonstrat la itemul 8).
16. $(2009x^2-x+5)\circ(x^2-2009x+5)=5 \Rightarrow [(2009x^2-x+5)-5][(x^2-2009x+5)-5]+5=5 \Rightarrow (2009x^2-x)(x^2-2009x)=0 \Rightarrow x(2009x-1)(x-2009)=0 \Rightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2009};2009\right\}$.
17. Conform punctului 15) $\Rightarrow$
$(2^x)\circ(\log_2 x)\circ(4+C^x_{2009})=(2^x-5)(\log_2 x-5)(4+C^x_{2009}-5)+5=5 \Rightarrow$
$2^x-5=0 \Rightarrow x_1=\log_2 5$
$\log_2 x-5=0 \Rightarrow x_2=2^5$
$C_{2009}^x-1=0\Rightarrow C_{2009}^x=1\Rightarrow x_3=0$ sau $x_4=2009$.
18. Generalizând punctul 8) se obţine
$$\underbrace{2009\circ 2009\circ...\circ 2009}_{de\ 2009\ ori}=\underbrace{(2009-5)\cdot(2009-5)\cdot...\cdot(2009-5)}_{de\ 2009\ ori}+5=2004^{2009}+5$$
19. $6\circ 7\circ 8\circ...\circ n=(5+1-5)\cdot(5+2-5)\cdot(5+3-5)\cdot...\cdot(n-5)+5=1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot(n-5)+5=(n-5)!+5$ se obţine $(n-5)!+5\geq 2009 \Rightarrow (n-5)!\geq 2004$. Ştim $6!=720$ şi $7!=5040$, deci $n=7$.
20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)+5=(x-5)^5+5 \Rightarrow (x-5)^5+5=2009^5+5 \Rightarrow$ $(x-5)^5=2009^5 \Rightarrow x-5=2009 \Rightarrow x=2014$.

Probleme propuse

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.

c) Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a \circ b = 8$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Arătați că $0 \circ (-3) = -3$.

b) Arătați că $x \circ y = (x + 3)(y + 3) - 3$, pentru orice numere reale x şi y.

c) Arătați că $(-3) \circ x = -3$, pentru orice număr real x.

d) Verificați dacă $e = -2$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$".

e) Calculați $(-2016) \circ (-2015) \circ \ldots \circ (-3)$.

f) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = 5$.

3. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = xy - x - y + 2$.

a) Arătaţi că $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Calculaţi $0 * 1 * 2 * 3$.

c) Determinaţi numerele reale a, ştiind că $a * a * 2016 = 2016$.

4. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.

a) Calculați $1 \circ \frac{1}{3}$

b) Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$".

c) Calculați $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \ldots \circ \frac{2016}{1008}$

5. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + x + y$.

a) Calculaţi $(-2) \circ 2$.

b) Arătați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$, pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 \circ x = -1$.

d) Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$" este asociativă.

e) Demonstraţi că numărul $n \circ n$ este multiplu de 8, pentru orice număr natural par n .

f) Dați un exemplu de două numere iraționale a și b , pentru care $a \circ b \in \mathbb{N}$.

6. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.

a) Arătaţi că $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Calculați $1 * 2 * 3 * * 2016$.

c) Determinaţi numerele naturale a, b şi c, ştiind că $a < b < c$ și $a * b * c = 66$.

7. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Arătați că $1 \circ (-2) = -2$.

b) Demonstrați că $x \circ y = (x + 2)(y + 2) - 2$, pentru orice numere reale x și y .

c) Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x$

8. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

a) Arătaţi că $x * y = -2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Arătaţi că $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 5$.

c) Determinaţi numerele naturale m şi n, pentru care $m * n = 27$.

9. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie dată de

$x \circ y = -xy + x + y$.

a) Calculaţi $1 \circ 2015$.

b) Arătaţi că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x si y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x \circ 5^x = 1$.

10. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie $x \circ y = x + y - 2$.

a) Calculaţi $(-2) \circ 2$.

b) Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

c) Verificaţi dacă $e = 2$ este element neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

d) Determinaţi numărul real x, ştiind că $(x+1) \circ x = 3$.

e) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x \circ 3^x = 0$

f) Arătaţi că $x^2 \circ \dfrac{1}{x^2} \geq 0$ pentru orice număr real nenul x.

11. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x * y = xy - 7x - 7y + 56$.

a) Arătaţi că $(-7) * 7 = 7$.

b) Arătaţi că $x * y = (x-7)(y-7) + 7$, pentru orice numere reale x şi y.

c) Calculaţi $1 * 2 * 3 * \cdots * 2015$.

12. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie asociativă

$x \circ y = xy - 3(x+y) + 12$.

a) Arătaţi că $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, pentru orice număr real x.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = x$.

c) Calculaţi $1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2014$.

13. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie dată de $x \circ y = x + y - 1$.

a) Calculaţi $2 \circ 3$.

b) Verificaţi dacă legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă.

c) Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

d) Determinaţi numerele reale x pentru care $x^2 \circ x = 11$

e) Arătaţi că $x \circ (x + 2014) = (x + 1012) \circ (x + 1012)$, pentru orice număr real x.

f) Determinaţi numărul real nenul x pentru care $x \circ \dfrac{1}{x} = 1$

14. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2(x + y - 1) - xy$.

a) Arătaţi că $1 * 2 = 2$.

b) Arătaţi că $x * 2 = 2 * x = 2$ pentru orice număr real x.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = x$.

15. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

a) Calculaţi $1 \circ 2$.

b) Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 2$.

16. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătaţi că $1*5 = 5$.

b) Arătaţi că $x * y = (x-5)(y-5) + 5$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = x$.

17. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = 3x + 3y - xy - 6$.

a) Calculaţi $1*3$.

b) Arătaţi că $x * y = 3 - (x-3)(y-3)$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*...*x}_{x\,de\,2014\,ori} = x$.

18. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x * x = x \circ x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*(y+1) = 4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbf{Z}$.

19. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Arătați că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x şi y .

b) Arătați că $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$.

c) Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x \circ x = x$.

20. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y - 5$.

a. Arătaţi că $(-2)* 7 = 0$.

b. Arătaţi că legea de compoziţie „*” este asociativă.

c. Arătaţi că $(1* 2)*(8*9) = (1*9)*(2*8)$.

d. Determinaţi numărul real x , pentru care $(x * x)* x = x$.

e. Determinaţi numărul real x, pentru care $9^x * 3^x = 7$.

f. Demonstrați că $x^2 * \frac{1}{x^2} \geq -3$, pentru orice număr real nenul x .

Virgil-Mihail Zaharia